القسم العلمى
الفصل الدراسى الثانى

تطبيقات
الرياضيات

الجزء الخاص بالشرح و التمارين

يشمل مسائل جديدة تقيس مستويات عليا من التفكير

تقنية جديدة
امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR





إعداد نخبة من خبراء التعليم

جديد...
يُصرف مع الكتاب الجزء الخاص بالامتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد

2
ثانوى
2020
B612


الوحدة
1
الديناميكا
الدرس 1 الحركة المستقيمة.
الدرس 2 الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم.
الدرس 3 الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية (السقوط
الدرس 4 قانون الجذب العام.
B612



الدرس 1

الحركة المستقيمة

بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية

الحـركة

هى تغير موضع الجسم بتغير الزمن بالنسبة إلى موضع جسم آخر.

والسكون والحركة مفهوم نسبى فراكب القطار قد يبدو ساكنًا بالنسبة لراكب آخر فى نفس القطار بينما كلاهما يعتبر متحركًا بالنسبة لشخص يقف على الطريق أثناء سير القطار.

وهناك أنواع عديدة للحركة فمنها :

١ حركة انتقالية يتحرك فيها الجسم بين نقطتين تسمى الأولى نقط البداية والثانية نقطة النهاية ومنها نوعان :

(أ) حركة فى خط مستقيم مثل حركة جسم يسقط من نافذة.

(ب) حركة فى خط منحنى مثل حركة المقذوفات.

٢ حركة دوارانية واهتزازية مثل حركة الكواكب وحركة بندول الساعة وهى خارج نطاق دراستنا فى هذا الكتاب.

الجسيم

هو نقطة افتراضية يتم استخدامها لدراسة حركة الجسم حيث يتم تمثيل حركة الجسم كله بحركة نقطة مع إهمال أى حركة داخلية أخرى للجسم مثل الحركة الدورانية أو الاهتزازية.

متجه الموضع لجسيم

هو المتجه الذى تنطبق نقطة بدايته مع موضع المشاهد لعملية الحركة (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسيم فى الوقت الحالى ويرمز له عادة بالرمز $\overrightarrow{ر}$ حيث :

$$\overrightarrow{ر} = س\,\overrightarrow{س} + ص\,\overrightarrow{ص}$$

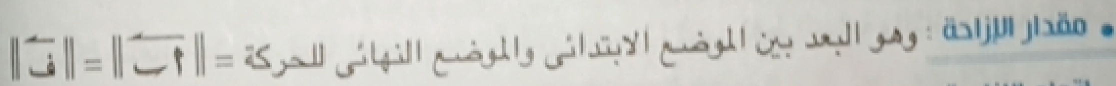
الإزاحة والمسافة

إذا تحركت سيارة من الموضع الابتدائى (أ) إلى أن وصلت الموضع النهائى (ب) متبعة المسار المبين بالشكل المقابل ، فإن :

متجه الإزاحة

هو المتجه الذى تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ التى تنطبق نقطة بدايتها (أ) مع الموضع الابتدائى للجسيم ونقطة نهايتها (ب) مع الموضع النهائى للجسيم ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{ف}$

أى أن لتحديد متجه الإزاحة يلزم معرفة :



- **مقدار الإزاحة** : وهو البعد بين الموضع الابتدائى والموضع النهائى للحركة = $\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{ف}\|$
- **اتجاه الإزاحة** : وهو اتجاة حركة الجسيم من الموضع الابتدائى إلى الموضع النهائى.

المسافة

هى طول المسار الفعلى الذى قطعه الجسيم وهى كمية قياسية.

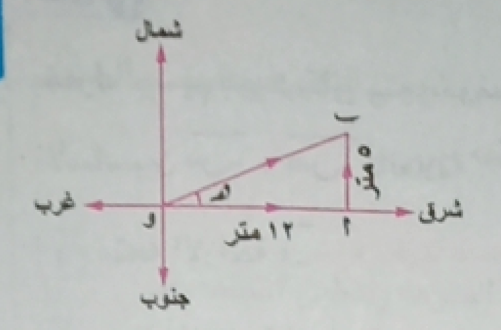
ملاحظات :

- مقدار الإزاحة الحادثه لجسيم يساوى المسافة المقطوعة فى حالة الحركة فى خط مستقيم فى اتجاه ثابت فقط.
- إذا تحرك جسيم ثم عاد إلى نفس النقطة التى تحرك منها فإن مقدار الإزاحة الحادثه له = صفر.
- مقدار الإزاحة ≤ المسافة المقطوعة.

مثال ١

إذا تحرك جسم شرقًا مسافة ١٢ مترًا ثم تحرك بعد ذلك مسافة ٥ أمتار شمالًا ثم توقف.

احسب المسافة والإزاحة الحادثة للجسم.



الحل

- المسافة التى قطعها الجسيم = و أ + أ ب = ١٢ + ٥ = ١٧ متر
- الإزاحة ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{و ب}}$ حيث :

– مقدار الإزاحة = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ متر

– اتجاه الإزاحة : حيث ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ فإن : هـ ≈ ١٢° ٣٧َ ٢٢ً

أى أن | مقدار الإزاحة ١٣ متر واتجاهها شمال الشرق بزاوية قياسها ١٢° ٣٧َ ٢٢ً

العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة

نفرض أن (و) هى موضع المشاهد لحركة جسيم من موضعه الابتدائى عند النقطة (أ) إلى موضعه النهائى عند النقطة (ب) بين لحظتين زمنيتين متتاليتين.

فإذا رمزنا لمتجة الموضع عند اللحظة الابتدائية (ن) بالرمز $\overleftarrow{ر}$. ولمتجه الموضع عند اللحظة النهائية (ن + هـ) بالرمز $\overleftarrow{ر}$ فإن متجه الإزاحة :

$\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ر}.$ = (س٢ − س١) $\overleftarrow{س}$ + (ص٢ − ص١) $\overleftarrow{ص}$

، ‖ $\overleftarrow{ف}$ ‖ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

وإذا كان $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ فإن : $\overleftarrow{ف}$ = ‖ $\overleftarrow{ف}$ ‖ $\overleftarrow{ى}$

مثال ٢

يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\vec{ر}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\vec{س}$ ، $\vec{ص}$ بالعلاقة : $\vec{ر} = (ن + ٢)\,\vec{س} + (٣ن - ٢)\,\vec{ص}$ أوجد :

١ متجه الإزاحة $\vec{ف}$

٢ معيار الإزاحة الحادثة حتى اللحظة ن = ٤ ثانية.

٣ معيار الإزاحة الحادثه بين اللحظتين ن = ٢ إلى ن = ٤

الحل

١ $\vec{ف} = \vec{ر} - \vec{ر}_{.} = (ن + ٢)\,\vec{س} + (٣ن - ٢)\,\vec{ص} - [٢\,\vec{س} - ٢\,\vec{ص}]$

$= ن\,\vec{س} + ٣ن\,\vec{ص}$

٢ ∵ $\vec{ر}_{.} = ٢\,\vec{س} - ٢\,\vec{ص}$ ، $\vec{ر}_{٤} = ٦\,\vec{س} + ١٠\,\vec{ص}$

∴ متجه الإزاحة الحادثة حتى اللحظة ن = ٤ هى $\vec{ر}_{٤} - \vec{ر}_{.}$

$= ٤\,\vec{س} + ١٢\,\vec{ص}$

، معيارها = $\sqrt{(٤)^{٢} + (١٢)^{٢}} = ٤\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

٣ ∵ $\vec{ر}_{٢} = ٤\,\vec{س} + ٤\,\vec{ص}$

، $\vec{ر}_{٤} = ٦\,\vec{س} + ١٠\,\vec{ص}$

∴ متجه الإزاحة الحادثه بين اللحظتين ن = ٢

، ن = ٤ هى $\vec{ر}_{٤} - \vec{ر}_{٢} = ٢\,\vec{س} + ٦\,\vec{ص}$

، معيارها = $\sqrt{(٢)^{٢} + (٦)^{٢}} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

متجه السرعة - السرعة

* متجه السرعة (Velocity) هو كمية متجهه تعبر عن المعدل الزمنى للتغير فى موضع الجسم.
* السرعة (Speed) هى كمية قياسية تعبر عن معيار متجه السرعة.

تعريف

متجه سرعة جسيم هو المتجه الذى معياره يساوى قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

فمثلًا : «٩٠ كم/س» تعبر عن «السرعة» أما «٩٠ كم/س شمالاً» تعبر عن «متجه السرعة»

وحدات قياس السرعة

هى : الكيلومتر فى الساعة أى (كم/س) ، المتر فى الثانية أى (م/ث) ، السنتيمتر فى الثانية أى (سم/ث).

حيث

$$١ \text{ كم/س} = \frac{١٠٠٠ \text{ متر}}{٦٠ \times ٦٠ \text{ ثانية}} = \frac{٥}{١٨} \text{ م / ث.}$$

$$، ١ \text{ كم/س} = \frac{١٠٠٠ \times ١٠٠ \text{ سم}}{٦٠ \times ٦٠ \text{ ثانية}} = \frac{٢٥٠}{٩} \text{ سم/ث.}$$

أى أن

كم/س ← $\times \frac{٥}{١٨}$ ← متر/ث

كم/س ← $\times \frac{٢٥٠}{٩}$ ← سم/ث

فمثلًا : $٢٧ \text{ كم/س} = ٢٧ \times \frac{٥}{١٨} = ٧,٥ \text{ م/ث}$

، $٤\frac{١}{٢} \text{ كم/س} = ٤\frac{١}{٢} \times \frac{٢٥٠}{٩} = ١٢٥ \text{ سم/ث}$

، $٢٠ \text{ م/ث} = ٢٠ \times \frac{١٨}{٥} = ٧٢ \text{ كم/س}$

الحركة المنتظمة

هى الحالة التى يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتًا.

* ومن ذلك نتوصل إلى الملاحظتين الهامتين الآتيتين على الحركة المنتظمة :

١ **ثبات اتجاه متجه السرعة :** وهذا يعنى أن الجسيم يتحرك فى اتجاه ثابت (يتحرك فى خط مستقيم ثابت).

لاحظ أن
الحركة المستقيمة هى الحركة فى خط مستقيم

٢ **ثبات معيار متجه السرعة :** وهذا يعنى أن الجسيم يقطع فى اتجاه حركته مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية أى (يتحرك بسرعة ثابتة).

ملاحظـة :

فى حالة الحركة المنتظمة يكون :

١ معيار الإزاحة الحادثة = المسافة المقطوعة

٢ العلاقة بين متجهى الإزاحة والسرعة هى : ف⃗ = ن ع⃗

٣ يسمى متجه السرعة الثابتة فى هذه الحالة بمتجه السرعة المنتظمة وهى السرعة التى يقطع بها الجسم ازاحات متساوية فى أزمنة متساوية.

الحركة المتغيرة

إذا لم تكن الحركة منتظمة فإننا نسميها متغيرة والحركة المتغيرة يتغير متجه سرعة الجسم فى المقدار أو فى الاتجاه أو فى كليهما من لحظة إلى أخرى.

* **لاحظ أن :** السيارة التى تقطع مسافة ثابتة ٨٠ كم كل ساعة فى مسار دائرى لها **سرعة ثابتة** «٨٠ كم/س» ولكن **متجه سرعتها** ليس ثابتًا لأن اتجاه الحركة يتغير.

ملاحظـة :

فى حالة الحركة فى خط مستقيم ثابت نفرض متجه وحدة ى⃗ فى اتجاه يوازى اتجاه الحركة وعلى ذلك فإن :

* ف (القياس الجبرى لمتجة الإزاحة) = ‖ف⃗‖ إذا كانت الإزاحة فى نفس اتجاه ى⃗
أ، – ‖ف⃗‖ إذا كانت الإزاحة فى عكس اتجاه ى⃗
* ع (القياس الجبرى لمتجه السرعة) = ‖ع⃗‖ إذا كان اتجاه السرعة فى نفس اتجاه ى⃗
أ، – ‖ع⃗‖ إذا كان اتجاه السرعة فى عكس اتجاه ى⃗

السرعة المتوسطة - متجه السرعة المتوسطة

* السرعة المتوسطة ($ع_م$) خلال فترة زمنية هى خارج قسمة المسافة الكلية فى هذه الفترة على مقدار هذه الفترة الزمنية وهى (كمية قياسية)

أى أن السرعة المتوسطة ($ع_م$) = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$

* متجه السرعة المتوسطة ($\overleftarrow{ع}_م$) خلال فترة زمنية هو خارج قسمة متجه الإزاحة فى هذه الفترة على مقدار هذه الفترة الزمنية وهو (كمية متجهة)

وإذا كان : $\overleftarrow{ر}_١$ ، $\overleftarrow{ر}_٢$ هما متجها الموضع لجسيم عند اللحظتين الزمنيتين $ن_١$ ، $ن_٢$ على الترتيب

فإن متجه السرعة المتوسطة ($\overleftarrow{ع}_م$) = $\frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{\overleftarrow{ر}_٢ - \overleftarrow{ر}_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{\overleftarrow{ف}}{ن_٢ - ن_١}$

* **لاحظ أن** : السرعة المتوسطة ليس بالضرورة أن تساوى معيار متجه السرعة المتوسطة.

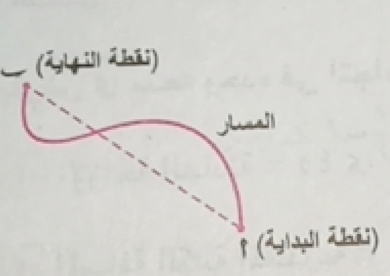
* **المفهوم الفيزيائى للسرعة المتوسطة** : هى السرعة التى لو سار بها الجسم بانتظام خلال الفترة الزمنية لقطع نفس المسافة الكلية.

متجه السرعة اللحظية

إذا كانت الفترة الزمنية ($ن_٢ - ن_١$) صغيرة جدًا ومتوسطها اللحظة $ن$ فإن متجه السرعة فى هذه الحالة يُعرف بمتجه السرعة اللحظية عند اللحظة $ن$ ويُرمز له بالرمز $\overleftarrow{ع}$

مثال توضيحى

إذا بدأ قائد سيارة رحلته بين مدينتين ا ، ب متخذًا المسار المنحنى المبين بالشكل. فإذا كان طول المسار ٢٤٠ كم بينما البعد بين المدينتين فى حالة اتخاذه طريقًا مستقيمًا هو ٢١٠ كم وقد أتم السائق رحلته فى ٣ ساعات



وبطبيعة الحال أثناء الرحلة فإن قراءة عداد السرعة تتغير من لحظة لأخرى فأحيانًا تكون ١٢٠ كم/ساعة وأخرى ٦٠ كم/ساعة وربما صفر كم/ساعة فى حالة التوقف فى محطة وقود أو استراحة ولكن فى نهاية الأمر فإن :

١ السيارة سارت مسافة ٢٤٠ كم فى فترة ٣ ساعات أى بمعدل ٨٠ كم لكل ساعة وهذا ما يسمى بالسرعة المتوسطة.

أى أن السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٢٤٠}{٣} = ٨٠$ كم/س

مسافة ٢٤٠ كم إلا أن الإزاحة الحادثة هى ٢١٠ كم فى الاتجاه من أ إلى ب وعلى ذلك فإن السيارة قطعت

٢ متجه السرعة المتوسطة مرتبط بالإزاحة الحادثة للجسم فالبرغم من أن السيارة قطعت مسافة ٢٤٠ كم إلا أن الإزاحة الحادثة هى ٢١٠ كم فى الاتجاه من أ إلى ب وعلى ذلك فإن :

متجه السرعة المتوسطة = $\frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٢١٠}{٣} =$ ٧٠ كم/ساعة فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

٣ قراءة عداد السرعة بالسيارة يدل على السرعة اللحظية

أى أن (١٢٠ كم/س ، ٦٠ كم/س ، ....) هى سرعات لحظية تختلف من لحظة لأخرى.

مثال ٣

قطعت سيارة مسافة ٤٥ كم على طريق مستقيم فى زمن قدره $\frac{٣}{٤}$ ساعة ثم عادت فقطعت ٢٥ كم فى الاتجاه المعاكس فى زمن قدره $\frac{١}{٢}$ ساعة أوجد فى نهاية الرحلة :

١ الإزاحة الحادثة.

٢ المسافة الكلية المقطوعة.

٣ السرعة المتوسطة.

٤ متجه السرعة المتوسطة.

الحل

بفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحده فى اتجاه الحركة من أ إلى ب فإن :

٤٥ كم $\overleftarrow{ى}$

أ ب

ح ب

٢٥ كم

١ الإزاحة الحادثة = ٤٥ $\overleftarrow{ى}$ + (−٢٥ $\overleftarrow{ى}$) = ٢٠ $\overleftarrow{ى}$

٢ المسافة الكلية المقطوعة = ٤٥ + ٢٥ = ٧٠ كم

٣ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٧٠}{\frac{٣}{٤}+\frac{١}{٢}} =$ ٥٦ كم/س

٤ متجه السرعة المتوسطة = $\frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٢٠ \overleftarrow{ى}}{\frac{٣}{٤}+\frac{١}{٢}} =$ ١٦ $\overleftarrow{ى}$

أى أن متجه السرعة المتوسطة له نفس متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ ومعياره = ١٦ كم/س

مثال ٤

قطع راكب دراجة على طريق مستقيم مسافة ٣٧,٥ كم بسرعة ٢٥ كم/س ثم قطع ١٨كم بسرعة ١٢كم/س. أوجد متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :

١ الإزاحتان فى اتجاه واحد.

٢ الإزاحتان فى اتجاهين متضادين.

الحل

∵ زمن قطع المسافة الأولى = $\frac{٣٧,٥}{٢٥}$ = ١,٥ ساعة

، زمن قطع المسافة الثانية = $\frac{١٨}{١٢}$ = ١,٥ ساعة

∴ الزمن الكلى = ١,٥ + ١,٥ = ٣ ساعة

١ إذا كانت الإزاحتان فى اتجاه واحد

∴ متجه الإزاحة الكلية = ٣٧,٥ $\overleftarrow{ى}$ + ١٨ $\overleftarrow{ى}$

= ٥٥,٥ $\overleftarrow{ى}$

∴ متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{ع}_م$ = $\frac{٥٥,٥}{٣}$ = ١٨,٥ $\overleftarrow{ى}$

∴ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه $\overleftarrow{ى}$ ومعياره = ١٨$\frac{١}{٢}$ كم/س

ى
٢٥ كم/س ١٢ كم/س
٣٧,٥ كم ١٨ كم

٢ إذا كانت الإزاحتان فى اتجاهين متضادين

∴ متجه الإزاحة الكلية = ٣٧,٥ $\overleftarrow{ى}$ + (-١٨ $\overleftarrow{ى}$)

= ١٩,٥ $\overleftarrow{ى}$

∴ متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{ع}_م$ = $\frac{١٩,٥ \overleftarrow{ى}}{٣}$ = ٦,٥ $\overleftarrow{ى}$

∴ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه $\overleftarrow{ى}$ ومعياره ٦,٥ كم/س.

ى
٢٥ كم/س
٣٧,٥ كم
١٢ كم/س
١٨ كم

مثال ٥

فى نظام إحداثى متعامد إذا كان جسيم عند الوضع أ (٧ ، ٣) بعد مرور ٣ ثانية من بداية رصد حركته وأصبح عند الوضع ب (١٣ ، ١١) بعد مرور ٥ ثوان من بداية الرصد أيضًا أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية ثم أوجد معيارها واتجاهها.

الحل

$\overline{\text{ر}}_{١} = \overline{\text{و أ}} = ٧\,\overline{\text{س}} + ٣\,\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ر}}_{٢} = \overline{\text{و ب}} = ١٣\,\overline{\text{س}} + ١١\,\overline{\text{ص}}$

$\therefore$ متجه السرعة المتوسطة $\overline{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{\overline{\text{ر}}_{٢} - \overline{\text{ر}}_{١}}{\text{ن}_{٢} - \text{ن}_{١}} = \dfrac{٦\,\overline{\text{س}} + ٨\,\overline{\text{ص}}}{٥ - ٣} = ٣\,\overline{\text{س}} + ٤\,\overline{\text{ص}}$

$\therefore \| \overline{\text{ع}}_{\text{م}} \| = \sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}} = ٥$ وحدة طول/ثانية.

، $\because$ ظا هـ $= \dfrac{٤}{٣}$ $\qquad \therefore$ هـ $\approx ٥٣° \; ٧' \; ٤٨''$

أى أن اتجاه متجه السرعة المتوسطة يصنع زاوية قياسها $٥٣° \; ٧' \; ٤٨''$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

مثال ٦

الشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن المنقضى والمسافة المقطوعة لحركة قطار فى خط مستقيم من نقطة (و) أوجد :

١ متجه السرعة المتوسطة.

٢ السرعة المتوسطة.

الحل

بفرض $\overline{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة القطار

وبأخذ النقطتين أ (١ ، ١٠٠) ، ب (٤ ، ٤٠٠)

$\therefore \overline{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن المنقضى}} = \dfrac{٤٠٠ - ١٠٠}{٤ - ١} = ١٠٠\,\overline{\text{ى}}$

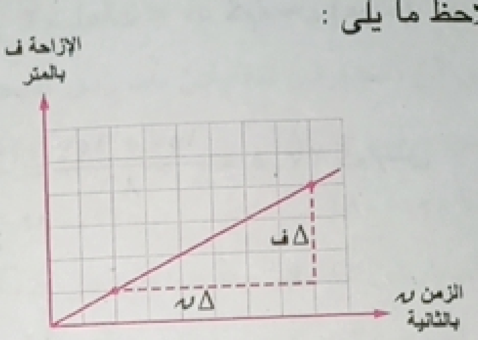
أى أن معيار متجه السرعة المتوسطة ١٠٠ كم/س فى اتجاه الحركة.

، السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن المنقضى}} = \frac{٣٠٠}{٣} = ١٠٠$ كم/س

ونلاحظ أن معيار متجه السرعة المتوسطة = السرعة المتوسطة لأن الحركة منتظمة.

ملاحظة :

عند تمثيل العلاقة بين الإزاحة الحادثة والزمن المستغرق لحركة فى خط مستقيم بيانيًا نلاحظ ما يلى :

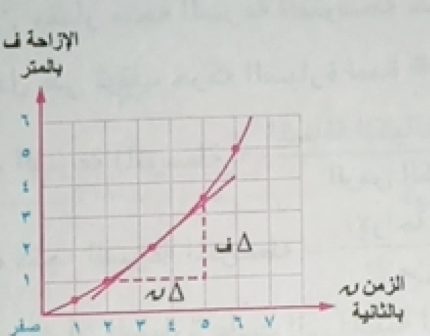


* الشكل البيانى يوضح أن الحركة منتظمة
* متجه السرعة اللحظية

= متجه السرعة المتوسطة

$= \frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن المنقضى}} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

= ميل الخط البيانى



* الشكل البيانى يوضح أن الحركة متغيرة.
* متجه السرعة اللحظية

= ميل المماس للمنحنى عند هذه اللحظة

$= \lim_{\Delta ن \to صفر} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

مثال ٧

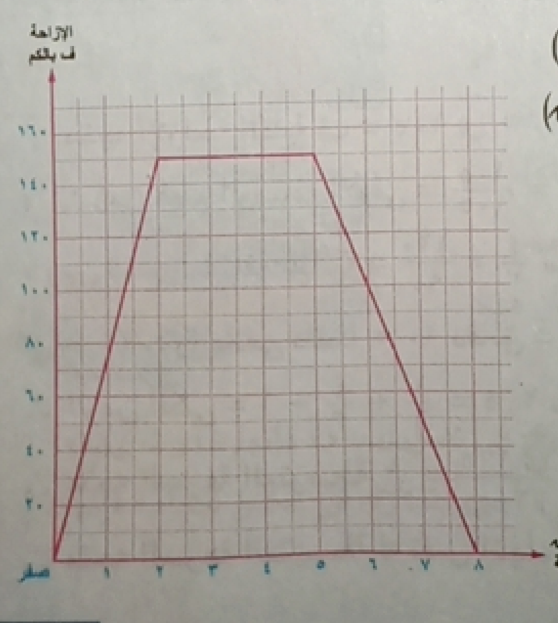
يمثل الشكل المقابل العلاقة بين مقدار الإزاحة (ف) الحادثة لسيارة تتحرك بين مدينتين ذهابًا وإيابًا والزمن (ن)

١ أوجد مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال أول ساعتين.

٢ أوجد مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال آخر ٣ ساعات.

٣ ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية.

٤ أوجد كلًا من السرعة المتوسطة ومتجه السرعة المتوسطة فى نهاية الرحلة.



الحـــل

١ ∵ ميل الخط البيانى خلال أول ساعتين = $\frac{\text{١٥٠ - صفر}}{\text{٢ - صفر}}$ = ٧٥

∴ مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال أول ساعتين = ٧٥ كم/س (ذهابًا)

٢ ∵ ميل الخط البيانى خلال آخر ٣ ساعات = $\frac{\text{صفر - ١٥٠}}{\text{٨ - ٥}}$ = -٥٠

∴ مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال آخر ٣ ساعات = ٥٠ كم/س (عودة)

٣ تدل على توقف حركة السيارة لمدة ٣ ساعات.

٤ • السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية المقطوعة}}{\text{الزمن الكلى}}$ = $\frac{\text{١٥٠ + ١٥٠}}{\text{٨}}$ = ٣٧,٥ كم/س

• متجه السرعة المتوسطة = $\frac{\text{الإزاحة النهائية}}{\text{الزمن الكلى}}$

وحيث أن السيارة عادت إلى المدينة الأولى مرة أخرى

∴ الإزاحة النهائية = $\overleftarrow{\text{صفر}}$

∴ متجه السرعة المتوسطة = $\overleftarrow{\text{صفر}}$

مثال ٨

قطع قطار المسافة بين القاهرة والإسكندرية على مرحلتين : المرحلة الأولى من القاهرة إلى طنطا ومسافتها ١٠٥ كم بسرعة ١٠٥ كم/س. المرحلة الثانية من طنطا إلى الإسكندرية ومسافتها ١٢٠ كم بسرعة ٩٠ كم/س. فإذا كان القطار قد توقف فى طنطا لمدة ١٠ دقائق. أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة الكلية (اعتبر أن القطار يتحرك طوال الوقت على خط مستقيم)

الحـــل

∵ متجه الإزاحة الكلية $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ١٠٥ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ١٢٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ = ٢٢٥ $\overleftarrow{\text{ى}}$

، ∵ زمن قطع المسافة الأولى = $\frac{\text{١٠٥}}{\text{١٠٥}}$ = ١ ساعة

، زمن قطع المسافة الثانية = $\frac{\text{١٢٠}}{\text{٩٠}}$ = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ ساعة

، زمن الاستراحة فى طنطا = ١٠ دقائق = $\frac{\text{١٠}}{\text{٦٠}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ ساعة

∴ الزمن الكلى = ١ + $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ + $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ = ٢,٥ ساعة

∴ متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ = $\frac{\text{٢٢٥ ى}}{\text{٢,٥}}$ = ٩٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$

∴ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه $\overleftarrow{\text{ى}}$ ومعياره يساوى ٩٠ كم/س.

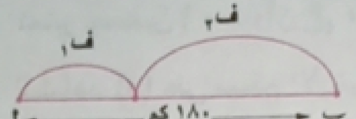
ى
٩٠ كم/س ١٠٥ كم/س
الإسكندرية ١٢٠ كم طنطا ١٠٥ كم

مثال ٩

مدينتان أ ، ب الطريق بينهما مستقيم. قامت سيارة من المدينة أ متجهة إلى ب بسرعة ٢٥ كم/س وفى نفس اللحظة قامت سيارة أخرى من المدينة ب متجهة إلى أ سرعتها ٦٥ كم/س.
أوجد متى وأين تتقابل السيارتان علمًا بأن طول الطريق ١٨٠ كم.

الحل

نفرض أن السيارتين تتقابلان بعد زمن قدره ن ساعة



∵ $ف_{١} + ف_{٢} = ١٨٠$ ∴ ٢٥ ن + ٦٥ ن = ١٨٠

∴ ٩٠ ن = ١٨٠ ∴ ن = ٢ ساعة

∴ السيارتان تتقابلان بعد ساعتين من بدء الحركة.

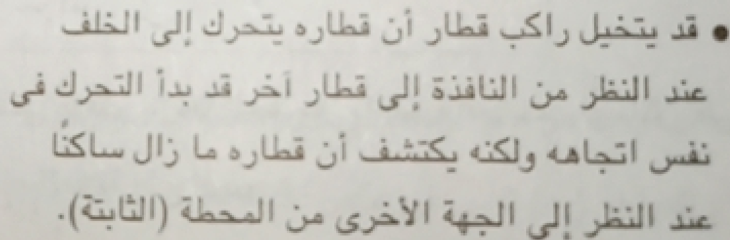
، ∵ $ف_{١}$ = ٢٥ × ٢ = ٥٠ كم

∴ السيارتان تتقابلان على بُعد ٥٠ كم من أ

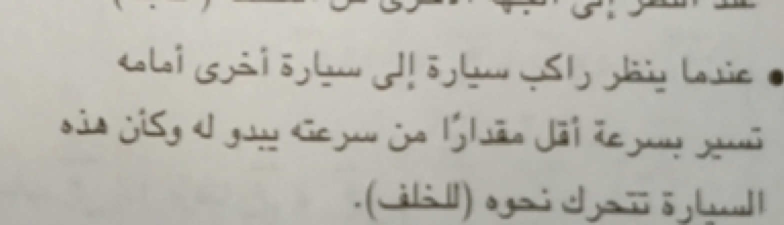
السرعة النسبية

تدلنا بعض الأمثلة الحياتية أن الحركة مفهوم نسبى يتغير وصفها من مشاهد إلى آخر بل هى قد تتغير بالنسبة للمشاهد الواحد حسب حالته.

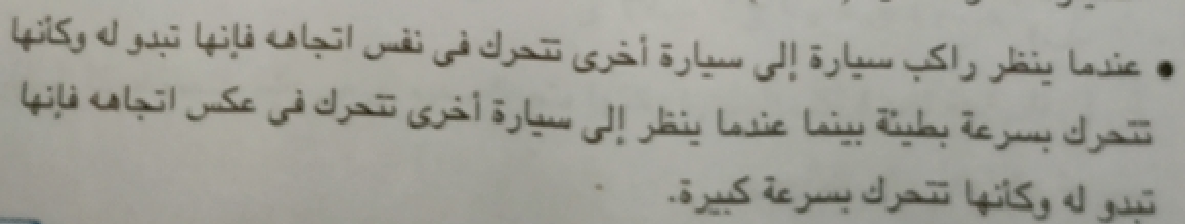
فمثلاً :



- قد يتخيل راكب قطار أن قطاره يتحرك إلى الخلف عند النظر من النافذة إلى قطار آخر قد بدأ التحرك فى نفس اتجاهه ولكنه يكتشف أن قطاره ما زال ساكنًا عند النظر إلى الجهة الأخرى من المحطة (الثابتة).



- عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى أمامه تسير بسرعة أقل مقدارًا من سرعته يبدو له وكأن هذه السيارة تتحرك نحوه (للخلف).



- عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى تتحرك فى نفس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة بطيئة بينما عندما ينظر إلى سيارة أخرى تتحرك فى عكس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة كبيرة.

مفهوم السرعة النسبية

السرعة النسبية لجسيم (ب) بالنسبة لجسيم آخر (أ) هى السرعة التى يبدو أن الجسيم (ب) يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (أ) فى حالة سكون ويرمز لها بالرمز ($ع_{ب أ}$).

متجه السرعة النسبية

نعتبر جسمين أ ، ب وأن $\overleftarrow{ع}_{أ}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب}$ هما متجها سرعتيهما بالنسبة لمشاهد (و) على سطح الأرض فإذا فرضنا أن شخصًا موجودًا على الجسم أ متحركًا معه رصد حركة الجسم ب

فإن $\overleftarrow{ع}_{ب أ}$ هو متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ

(ش)

ولمعرفة العلاقة بين $\overleftarrow{ع}_{أ}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب أ}$ نعطى كلاً من الجسمين أ ، ب سرعة إضافية = $-\overleftarrow{ع}_{أ}$ ليصبح أ ساكنًا ويصبح متجه سرعة الجسم ب بالنسبة للجسم أ = $\overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{أ}$

$$\therefore \quad \overleftarrow{ع}_{ب أ} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{أ} \quad ...(1)$$

أى أن متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ = متجه سرعة ب − متجه سرعة أ

أى تساوى محصلة متجهى السرعتين $\overleftarrow{ع}_{ب}$ ، $-\overleftarrow{ع}_{أ}$

والعلاقة (١) تعطى السرعة النسبية متى عرفت سرعتا الجسمين بالنسبة للمشاهد الساكن على سطح الأرض (و) كما يمكن كتابة هذه العلاقة على الصورة :

$$\overleftarrow{ع}_{ب} = \overleftarrow{ع}_{أ} + \overleftarrow{ع}_{ب أ} \quad ...(2)$$

والعلاقة (٢) يمكن بواسطتها حساب $\overleftarrow{ع}_{ب}$ إذا عرفنا $\overleftarrow{ع}_{أ}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب أ}$

ملاحظتان :

1. $\overleftarrow{ع}_{ب م} = -\overleftarrow{ع}_{م ب}$

2. إذا كانت سرعة السيارة (م) هى $ع_م$ ، سرعة الدراجة (ب) هى $ع_ب$ وكانت سرعة الدراجة (ب) بالنسبة للسيارة (م) هى $ع_{ب م}$

أولًا : إذا كان : $\overleftarrow{ع}_م$ ، $\overleftarrow{ع}_ب$ فى اتجاهين متضادين فإن : $\overleftarrow{ع}_{ب م}$ لها نفس اتجاه $\overleftarrow{ع}_ب$

ثانيًا : إذا كان : $\overleftarrow{ع}_م$ ، $\overleftarrow{ع}_ب$ فى نفس الاتجاه فإن :

* $\overleftarrow{ع}_{ب م}$ لها نفس اتجاه $\overleftarrow{ع}_ب$ إذا كان : $ع_ب > ع_م$
* $\overleftarrow{ع}_{ب م}$ لها عكس اتجاه $\overleftarrow{ع}_ب$ إذا كان : $ع_ب < ع_م$

مثال ١٠

تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٧٥ كم/ س فإذا تحركت على الطريق نفسه دراجة بخارية بسرعة ٤٥ كم/ س فأوجد سرعتها بالنسبة للسيارة فى كل من الحالتين الآتيتين :

1. الدراجة تسير فى عكس اتجاه حركة السيارة.
2. الدراجة تسير فى نفس اتجاه حركة السيارة.

الحل

نفرض أن $\overleftarrow{ى}$ هو متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة.

1. الدراجة (ب) تسير فى عكس اتجاه حركة السيارة (م) :

$\therefore \overleftarrow{ع}_م = ٧٥ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_ب = -٤٥ \overleftarrow{ى}$

، $\because \overleftarrow{ع}_{ب م} = \overleftarrow{ع}_ب - \overleftarrow{ع}_م$

$\therefore \overleftarrow{ع}_{ب م} = -٤٥ \overleftarrow{ى} - ٧٥ \overleftarrow{ى} = -١٢٠ \overleftarrow{ى}$

أى أن الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحوه أى فى عكس اتجاه حركة السيارة بسرعة مقدارها ١٢٠ كم/س.

(٢) الدراجة (ب) تسير فى نفس اتجاه حركة السيارة (أ) :

$\because \overrightarrow{ع_أ} = ٧٥ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_ب} = ٤٥ \overrightarrow{ى}$

، $\because \overrightarrow{ع_{ب أ}} = \overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ}$

$\therefore \overrightarrow{ع_{ب أ}} = ٤٥ \overrightarrow{ى} - ٧٥ \overrightarrow{ى} = -٣٠ \overrightarrow{ى}$

أى أن : الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحو السيارة بسرعة مقدارها ٣٠ كم/س وكأنها تتقهقر بهذه السرعة.

مثال (١١)

تتحرك باخرة فى خط مستقيم نحو ميناء ما ولما وصلت على بعد ١٠٠ كم منه مرت فوقها طائرة تطير فى الاتجاه المضاد بسرعة ٣٠٠ كم/س ورصدت حركة الباخرة فبدت لها متحركة بسرعة ٣٥٠ كم/س احسب كم من الوقت يمضى من لحظة الرصد حتى وصول الباخرة إلى الميناء.

الحل

نفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الطائرة (أ)

$\therefore \overrightarrow{ع_أ} = ٣٠٠ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_{ب أ}} = -٣٥٠ \overrightarrow{ى}$

، $\because \overrightarrow{ع_{ب أ}} = \overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ}$

$\therefore -٣٥٠ \overrightarrow{ى} = \overrightarrow{ع_ب} - ٣٠٠ \overrightarrow{ى}$

$\therefore \overrightarrow{ع_ب} = -٥٠ \overrightarrow{ى}$

$\therefore$ سرعة الباخرة = ٥٠ كم/س نحو الميناء

، $\because ن = \frac{ف}{ع}$

$\therefore$ زمن وصول الباخرة إلى الميناء $= \frac{١٠٠}{٥٠} = ٢$ ساعة.

مثال ١٢

قامت سيارة الشرطة (أ) التى تتحرك فى خط مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) بالنسبة لها قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/س ولما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة (ب) أصبحت ١٠٠ كم/س، فما هى السرعة الفعلية لكل من السيارتين ؟

الحل

نفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة (أ)

$\because \overleftarrow{ع}_{بأ} = -١٢٠ \overleftarrow{ى}$

$\therefore \overleftarrow{ع}_ب - \overleftarrow{ع}_أ = -١٢٠ \overleftarrow{ى}$ (١)

عندما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف

$\therefore \overleftarrow{ع}_{بأ} = -١٠٠ \overleftarrow{ى}$

$\therefore \overleftarrow{ع}_ب - \frac{١}{٢} \overleftarrow{ع}_أ = -١٠٠ \overleftarrow{ى}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \overleftarrow{ع}_أ = ٤٠ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_ب = -٨٠ \overleftarrow{ى}$

$\therefore ع_أ = ٤٠$ كم/س ، $ع_ب = ٨٠$ كم/س فى الاتجاه المضاد.

سيارة الشرطة أ — سيارة ب — $\overleftarrow{ى}$

ملاحظة :

إذا كان (أ) طرادًا سرعته $ع_أ$

أطلق منه طوربيد (ب) بسرعة ما

$\therefore$ سرعة الطوربيد $ع_ب$ = سرعة الطراد $(ع_أ)$ + السرعة التى أطلق بها الطوربيد.

مثال ١٣

يتحرك طراد وسفينة على مسار مستقيم واحد بحيث كان كل منهما يتحرك نحو الآخر وقد راقب الطراد حركة السفينة وعندما كانت على بُعد ٤٠ كم منه كانت سرعة السفينة ٥٠ كم/س وسرعة الطراد ٦٤ كم/س وعندئذ أطلق الطراد عليها طوربيداً بسرعة ١٢٦ كم/س احسب الزمن الذى يمضى من لحظة إطلاق الطوربيد حتى لحظة إصابة السفينة.

الحـــل

(٢) نفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الطراد

∴ سرعة الطوربيد $ع_ح$

= سرعة الطراد + السرعة التى أطلق بها الطوربيد

= ٦٤ + ١٢٦ = ١٩٠ كم/س

∴ متجه سرعة الطوربيد بالنسبة للسفينة $\overleftarrow{ع}_{حب} = \overleftarrow{ع}_ح - \overleftarrow{ع}_ب$

$= ١٩٠ \overleftarrow{ى} - (-٥٠) \overleftarrow{ى} = ٢٤٠ \overleftarrow{ى}$

أى $ع_{حب}$ = ٢٤٠ كم/س فى اتجاه حركة الطراد.

∴ الزمن الذى يستغرقه الطوربيد حتى إصابة السفينة $= \frac{ف}{ع_{حب}} = \frac{٤٠}{٢٤٠} = \frac{١}{٦}$ ساعة

$= \frac{١}{٦} \times ٦٠$ دقيقة = ١٠ دقائق

مثال ١٤

مر قطار طوله ١٥٠ مترًا ويتحرك بسرعة ٧٢ كم/س إلى جوار قطار آخر طوله ١٠٠ متر على شريط موازٍ. **أوجد الزمن اللازم لكى يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثانى إذا كان القطار الثانى :**

١ ساكنًا.

٢ يتحرك بسرعة ٤٥ كم/س فى نفس اتجاه حركة القطار الأول.

٣ يتحرك بسرعة ٤٥ كم/س فى عكس اتجاه حركة القطار الأول.

الحـــل

بفرض أن متجه سرعة القطار الأول = $\overleftarrow{ع}_أ$ وأن متجه سرعة القطار الثانى = $\overleftarrow{ع}_ب$ وأن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة القطار الأول.

١ $\overleftarrow{ع}_أ = ٧٢ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_ب = \overleftarrow{٠}$

∴ $\overleftarrow{ع}_{أب} = \overleftarrow{ع}_أ - \overleftarrow{ع}_ب = ٧٢ \overleftarrow{ى} - \overleftarrow{٠} = ٧٢ \overleftarrow{ى}$

ولكى يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثانى يجب أن يقطع مسافة ١٥٠ + ١٠٠ = ٢٥٠ مترًا وبسرعة مقدارها ٧٢ كم/س $= ٧٢ \times \frac{٥}{١٨} = ٢٠$ متر/ث

∴ الزمن الذى يستغرقه $= \frac{٢٥٠}{٢٠} = ١٢,٥$ ثانية

[٢] $\overleftarrow{ع_م} = ٧٢ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_ب} = ٤٥ \overleftarrow{ى}$ ∴ $\overleftarrow{ع_{مب}} = \overleftarrow{ع_م} - \overleftarrow{ع_ب} = ٧٢ \overleftarrow{ى} - ٤٥ \overleftarrow{ى} = ٢٧ \overleftarrow{ى}$

∴ لكى يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثانى يجب أن يقطع مسافة ٢٥٠ مترًا

بسرعة $٢٧ \times \frac{٥}{١٨} = ٧,٥$ متر/ث

∴ الزمن الذى يستغرقه $= \frac{٢٥٠}{٧,٥} = ٣٣\frac{١}{٣}$ ثانية

[٣] $\overleftarrow{ع_م} = ٧٢ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_ب} = -٤٥ \overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ع_{مب}} = \overleftarrow{ع_م} - \overleftarrow{ع_ب} = ٧٢ \overleftarrow{ى} - (-٤٥ \overleftarrow{ى}) = ١١٧ \overleftarrow{ى}$

∴ لكى يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثانى يجب أن يقطع مسافة ٢٥٠ مترًا بسرعة

$١١٧ \times \frac{٥}{١٨} = \frac{٦٥}{٢}$ متر/ث

∴ الزمن الذى يستغرقه $= ٢٥٠ \div \frac{٦٥}{٢} = ٢٥٠ \times \frac{٢}{٦٥} \simeq ٧,٧$ ثانية

مثال ١٥

يتحرك قطار بسرعة ٨٤ كم/س لحق بقطار آخر طوله ١٢٠ مترًا يتحرك بسرعة ٦٠ كم/س على شريط موازٍ فمر عليه بالكامل فى ٤٥ ثانية. أوجد طول القطار الأول ثم أوجد الزمن الذى يستغرقه فى المرور على كوبرى طوله ٥٢٠ مترًا علمًا بأن القطار الثانى يسير فى نفس اتجاه القطار الأول.

الحل

نفرض أن متجه سرعة القطار الأول $= \overleftarrow{ع_م}$ وأن طوله = ف مترًا

وأن متجه سرعة القطار الثانى $= \overleftarrow{ع_ب}$ وأن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة القطارين.

∴ $\overleftarrow{ع_م} = ٨٤ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_ب} = ٦٠ \overleftarrow{ى}$ ∴ $\overleftarrow{ع_{مب}} = \overleftarrow{ع_م} - \overleftarrow{ع_ب} = ٨٤ \overleftarrow{ى} - ٦٠ \overleftarrow{ى} = ٢٤ \overleftarrow{ى}$

∴ القطار الأول يقطع مسافة (ف + ١٢٠) مترًا بسرعة مقدارها ٢٤ كم/س

$= ٢٤ \times \frac{٥}{١٨} = \frac{٢٠}{٣}$ متر/ث فى زمن قدره ٤٥ ثانية

∴ ف + ١٢٠ $= \frac{٢٠}{٣} \times ٤٥ = ٣٠٠$ ∴ ف (طول القطار الأول) = ٣٠٠ − ١٢٠ = ١٨٠ مترًا

ولكى يمر القطار الأول على الكوبرى يجب أن يقطع مسافة (١٨٠ + ٥٢٠) = ٧٠٠ متر

بسرعة ٨٤ كم/س أى بسرعة $٨٤ \times \frac{٥}{١٨} = \frac{٧٠}{٣}$ متر/ث

∴ الزمن الذى يستغرقه لعبور الكوبرى $= ٧٠٠ \div \frac{٧٠}{٣} = ٧٠٠ \times \frac{٣}{٧٠} = ٣٠$ ثانية

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ٢٠ م/ث = ... كم/س

(أ) $\frac{٥٠}{٩}$ (ب) ٧٢ (جـ) ٠,١٨ (د) ٢٠

② ٤٥ كم/دقيقة = ... م/ث

(أ) ٧٥٠ (ب) ١٢,٥ (جـ) ١٦٢ (د) ٧٥

③ إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم ٩ متر شرقًا ثم عاد ٣ متر غربًا فإن :
الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ١٢ متر فى اتجاه الشرق. (ب) ١٢ متر فى اتجاه الغرب.
(جـ) ٦ متر فى اتجاه الشرق. (د) ٦ متر فى اتجاه الغرب.

④ قطعت سيارة مسافة قدرها ١٨٠ كم خلال فترة زمنية مدتها ١٢٠ دقيقة فإن
المتوسطة = ... كم/ساعة.

(أ) ٩٠ (ب) ١,٥ (جـ) ١٨٠ (د) ٢٥

⑤ إذا كان الضوء يصل من الشمس إلى الأرض فى ٨,٣ دقيقة وكان بُعد الـ
الأرض $١,٤٩٤ \times ١٠^{١١}$ متر فإن سرعة الضوء .... كم/ث.

(أ) $١,٨ \times ١٠^{١٠}$ (ب) ٣٠٠
(جـ) ٣٠٠٠٠٠ (د) ٣×١٠^{٨}

⑥ متجه الموضع لجسيم يتحرك يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ر} = (ن^٢ - ٩)\overleftarrow{س} + ن\overleftarrow{ص}$
فإن متجه الإزاحة $\overleftarrow{ف}$ = ...

(أ) $ن^٢ \overleftarrow{س} + ن\overleftarrow{ص}$ (ب) $٩\overleftarrow{س} + ن\overleftarrow{ص}$
(جـ) $(ن^٢ - ٩)\overleftarrow{س} + ن\overleftarrow{ص}$ (د) $-ن^٢\overleftarrow{س} - ن\overleftarrow{ص}$

⑦ إذا كان : $\overleftarrow{ع}_أ = ١٢٠ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_ب = -٨٠ \overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{ع}_{ب أ}$ = ...

(أ) $٤٠ \overleftarrow{ى}$ (ب) $-٤٠ \overleftarrow{ى}$
(جـ) $٢٠٠ \overleftarrow{ى}$ (د) -٢٠٠

⑧ 📖 يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم/س ويتحرك فى نفس الاتجاه راكب آخر ب بسرعة ١٢ كم/س فإن القياس الجبرى لمتجه سرعة ب بالنسبة إلى أ تساوى .... كم/س

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢٧ (د) −٢٧

⑨ تتحرك سيارتان أ ، ب على طريق مستقيم واحد وفى اتجاهين متضادين بالسرعتين ١٢٥ كم/س ، ٧٥ كم/س على الترتيب

فإن سرعة السيارة ب بالنسبة إلى السيارة أ = ... كم/س

(أ) ٥٠ (ب) −٥٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٧٥

⑩ قذفت كرة لأعلى فوصلت إلى ارتفاع ٣ متر ثم عادت إلى نقطة القذف مرة أخرى فإن مقدار الإزاحة الحادثة يساوى ....

(أ) ٣ متر (ب) ٦ متر (جـ) صفر (د) ٩ متر

⑪ عندما يتحرك جسيم فإن مقدار الإزاحة .... المسافة المقطوعة.

(أ) $<$ (ب) $\le$ (جـ) $>$ (د) $\ge$

⑫ إذا كان متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة (و) يعطى كدالة فى الزمن ن بالثانية بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ر}} = (٢\,\text{ن}^{٢} + ٣)\,\overleftarrow{\text{ى}}$ فإن معيار متجه الازاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ بعد ٢ ثانية يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١١

⑬ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ف}} = ٤\,\text{ن}\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\text{ن}\,\overleftarrow{\text{ص}}$ وكان $\overleftarrow{\text{ر}}_{٠} = \overleftarrow{\text{ص}} - ٢\,\overleftarrow{\text{س}}$

فإن : $\overleftarrow{\text{ر}} =$ .... عندما $\text{ن} = ١$

(أ) $٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٦\,\overleftarrow{\text{ص}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{س}} - ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{س}} - ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ (د) $-٧\,\overleftarrow{\text{س}} - ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$

⑭ 📖 إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٥ كم/س لمدة ٢٠ دقيقة فإن المسافة المقطوعة بالكم تساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٥ (د) ٣٠

⑮ 📖 الزمن بالساعة الذى تستغرقه سيارة تتحرك بسرعة منتظمة ٢٠ م/ث فى قطع مسافة ١٨٠ كم يساوى ....

(أ) $١\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $٢\frac{١}{٢}$ (د) ٣

(١٦) تحركت دراجة ناحية الشرق بسرعة ٤ م/ث لمدة ٦٠ ثانية ثم توقفت لمدة ١٠ ثوان ثم تحركت ناحية الغرب بسرعة ٥ م/ث لمدة ٣٠ ثانية أخرى فإن السرعة المتوسطة خلال الرحلة الكلية = ... م/ث

(أ) ٠,٩ (ب) ٠,٧ (جـ) ١ (د) ٣,٩

(١٧) إذا كان: $\overline{ع}_{ب} = ١٥ \overline{س}$ ، $\overline{ع}_{م} = ٣٥ \overline{س}$ فإن: $\overline{ع}_{ل}$ = ...

(أ) $-٥٠ \overline{س}$ (ب) $-٢٠ \overline{س}$ (جـ) $٢٠ \overline{س}$ (د) $٥٠ \overline{س}$

(١٨) أ ، ب جسمان يتحركان فى اتجاهين متضادين ، معيار سرعة أ ضعف معيار سرعة ب فإن السرعة النسبية للجسم أ بالنسبة للجسم ب = ...

(أ) $١,٥ ع_{أ}$ (ب) $٢ ع_{أ}$ (جـ) $٢,٥ ع_{أ}$ (د) $٣ ع_{أ}$

٢ تحرك جسيم مسافة ٤٨ متر شرقًا ثم غير اتجاهه وسار ٢٠ متر شمالًا. أوجد المسافة التى تحركها الجسيم وكذلك الإزاحة الحادثة. «٦٨ متر ، ٥٢ متر فى اتجاه ١٢َ ٣٧َ ٢٢° شمال الشرق»

٣ تحرك راكب دراجة ٦ كم غربًا ثم تحرك بعد ذلك ٨ كم بزاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب. احسب المسافة والإزاحة التى قطعها راكب الدراجة.

«١٤ كم ، $٢\sqrt{٣٧}$ كم فى اتجاه ٥٤ً ٤٢َ ٣٤° جنوب الغرب»

٤ فى الشكل المقابل :

إذا كانت كل من $\overline{ءجـ}$ ، $\overline{أب}$ عمودية على $\overline{بجـ}$

وإذا تحرك جسيم من النقطة أ إلى النقطة ب ثم جـ وتوقف عند ء

فأوجد المسافة التى قطعها الجسيم وكذلك الإزاحة الحادثة.

«٣٥ سم ، ٢٥ سم فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$»

٥ يتحرك جسيم بحيث أن متجه موضعه $\overline{ر}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ بالعلاقة $\overline{ر} = (٦ ن - ٣) \overline{س} + (٨ ن + ١) \overline{ص}$.

أوجد متجة الإزاحة الحادثة حتى اللحظة ن = ٣ «$١٨ \overline{س} + ٢٤ \overline{ص}$»

٦ يتحرك جسيم فى خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث أن متجه موضعه $\overline{ر}$ يتحدد بالعلاقة $\overline{ر} = (ن^{٢} + ٣ ن + ٥) \overline{ى}$ حيث $\overline{ى}$ متجه وحدة مواز للخط المستقيم.

أوجد متجه الإزاحة، كذلك متجه السرعة المتوسطة منذ بدء الحركة حتى ن = ٣ ثانية.

«$(ن^{٢} + ٣ ن) \overline{ى}$ ، ٦$\overline{ى}$»

٧ قطع راكب دراجة ٤٠ كيلو مترًا على طريق مستقيم بسرعة ٢٠ كم/س ثم عاد فقطع ١٥ كيلو مترًا فى الاتجاه المعاكس بسرعة ١٥ كم/س.
أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة الكلية.

«$\frac{١}{٣}$ ٨ كم/س فى اتجاه حركة قطع المسافة الأولى»

---

٨ سار رجل على طريق مستقيم فقطع ٨٠٠ متر بسرعة ٩ كم/س ، وقطع نفس المسافة فى نفس الاتجاه بسرعة ٤,٥ كم/س.
أوجد السرعة المتوسطة للرجل خلال الرحلة كلها.

«$\frac{٥}{٣}$ متر/ث»

---

٩ يتحرك جسم فى خط مستقيم مسافة ١٠٠ م بسرعة ٥ م/ث ثم تحرك بسرعة ٨ م/ث فى نفس الاتجاه لمدة ١٠ ثوان أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

«٦ متر/ث»

---

١٠ قطع راكب دراجة مسافة ٦٠ كم فى اتجاه الغرب ثم مسافة ٩٠ كم فى اتجاه الشرق فإذا كانت سرعته ١٢ كم/س.
فأوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

«٢,٤ كم/س فى اتجاه الشرق»

---

١١ قطعت سيارة المسافة بين القاهرة والإسماعيلية وقدرها ١٢٠ كم على مرحلتين : الأولى ومسافتها ٤٠ كم بسرعة ٨٠ كم/س والثانية ومسافتها ٨٠ كم بسرعة ٦٠ كم/س فإذا اعتبرنا أن السيارة تتحرك طوال الوقت فى خط مستقيم وأن السيارة توقفت بعد قطع المرحلة الأولى لمدة ١٠ دقائق. فأوجد متجه سرعتها المتوسطة خلال الرحلة كلها.

«٦٠ كم/س فى اتجاه الحركة من القاهرة إلى الإسماعيلية»

---

١٢ قطع راكب دراجة على طريق مستقيم مسافة ٢٧ كم بسرعة ١٨ كم/س ثم قطع مسافة ٣٦ كم بسرعة ١٢ كم/س. أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :

① الإزاحتان فى اتجاه واحد. «١٤ كم/س فى اتجاه الإزاحتين»

② الإزاحتان فى اتجاهين متضادين. «٢ كم/س فى اتجاه الإزاحة الثانية»

---

١٣ إذا كان الجسيم عند لحظتين زمنيتين ٢ ، ٦ ثانية من بدء حركته عند الموضعين أ (٣ ، ٥) ، ب (٧ ، ٢٥) على الترتيب أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

«$\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، ٢$\sqrt{٢٦}$ وحدة طول/ثانية ، ٢٤ َ ٤١ َ ٧٨° مع $\overleftarrow{و س}$»

١٤ دخل قطار طوله ١٥٠ مترًا نفقًا مستقيمًا طوله ف متر فاستغرق عبوره بالكامل النفق زمن قدره ١٥ ثانية.
أوجد طول النفق إذا كانت سرعة القطار منتظمة وتساوى ٩٠ كم/س.

١٥ **الشكل المقابل :** يمثل بيانيًا منحنى (الإزاحة – الزمن) لفأر يهرب من قط
أعد رسم هذا الشكل إذا هرب الفأر من القط بضعف سرعته.

الزمن (ن) بالثانية

١٦ **الشكل المقابل :** يمثل العلاقة بين المسافة بالكيلومتر والزمن بالساعة لمسار دراجة بخارية تتحرك بين مدينتين. أجب عما يلى :
(١) ما مقدار متجه السرعة المتوسطة للدراجة فى أثناء الذهاب ؟
(٢) ما مقدار متجه السرعة المتوسطة للدراجة فى أثناء العودة ؟
(٣) ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل.

الزمن بالساعة

«٣٠ كم/س ، ٤٥ كم/س ...»

١٧ **يوضح الشكل المقابل :** مسار حركة كل من أحمد وعمرو فى قطع المسافة بين قريتين ، أحدهما فى القرية الأولى ، والآخر فى القرية الثانية.
(١) هل بدأ أحمد وعمرو الحركة فى توقيت واحد ؟ فسر إجابتك.
(٢) بعد كم دقيقة التقى أحمد وعمرو ؟
(٣) ما الزمن الذى استغرقه أحمد فى قطع المسافة ؟
(٤) أوجد سرعة عمرو.
(٥) إذا بدأ عمرو التحرك الساعة ٩ : ٣٠ ق س صباحًا فمتى يصل إلى القرية الأخرى ؟

عمرو
أحمد
الزمن بالدقيقة

«نعم ، ٣٠ دقيقة ، ٨٠ دقيقة ، ٠,١٨ كم/ دقيقة ، ١٠ : ٢٠ ق س»

١٨ تحركت دراجة ...
من نقطة أ ، وبعد ...
ارسم شكلًا بيانيًا ...
(١) أوجد سرعة ...
(٢) اكتب العلاقة ...

١٩ تتحرك سيارة ...
دراجة بخارية ...
أوجد السرعة ...
(١) الدراجة ...
(٢) الدراجة ...

٢٠ دراجة بخارية ...
تتحرك بسرعة ...
فما هى السر...

٢١ تتحرك مدمر...
ثابتة ٦٠ كم...
فأوجد السر...

٢٢ تتحرك ...
راقبت هذه ...
بسرعة ٢٠ ...

٢٣ يتحرك جس...
، ١٢٠ ك...
أوجد متى ...

٢٤ مدين...
أ متجه...
ب متجه...
أوجد مت...

١٨ تحركت دراجة بخارية حركة منتظمة فوجد أنها بعد دقيقة واحدة أصبحت على بعد ٢ كم من نقطة ؟ ، وبعد ٣ دقائق أصبحت على بعد ٥ كم من نفس النقطة.
ارسم شكلًا بيانيًا يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لهذه الدراجة ومن الرسم :
(١) أوجد سرعة الدراجة.
(٢) اكتب العلاقة الرياضية بين الزمن (ن) والمسافة (ف). «١.٥ كم/د ، ف = ١.٥ ن + ٠.٥»

١٩ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/ساعة فإذا تحركت على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٣٠ كم/ساعة.
أوجد السرعة النسبية للدراجة بالنسبة للسيارة فى كل من الحالتين الآتيتين :
(١) الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة.
(٢) الدراجة تتحرك عكس اتجاه حركة السيارة. «٥٠ كم/س ، ١١٠ كم/س»

٢٠ دراجة بخارية تسير بسرعة ٤٠ كم/س لاحظ راكبها أن سيارة تسير فى الاتجاه المضاد تتحرك بسرعة ١٠٥ كم/س
فما هى السرعة الفعلية للسيارة ؟ «٦٥ كم/س فى الاتجاه المضاد لحركة الدراجة»

٢١ تتحرك مدمرة وسفينة معادية فى خط مستقيم فإذا كانت المدمرة تطارد السفينة بسرعة ثابتة ٦٠ كم/س وكانت السفينة تبدو لقائد المدمرة أنها متحركة نحوه بسرعة ٢٠ كم/س
فأوجد السرعة الفعلية للسفينة. «٤٠ كم/س فى نفس اتجاه المدمرة»

٢٢ تتحرك سيارة رادار لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوى بسرعة ٤٠ كم/س ، راقبت هذه السيارة حركة سيارة نقل قادمة فى الاتجاه المضاد ، فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١٢٠ كم/س فما هى السرعة الفعلية لسيارة النقل ؟ «٨٠ كم/س»

٢٣ يتحرك جسمان ؟ ، ب فى خط مستقيم فى الاتجاه $\overleftarrow{\text{ب؟}}$ بالسرعتين ١٠٠٠ م/د ، ١٢٠ كم/س فإذا كانت المسافة بينهما ٣٠ كم.
أوجد متى وأين يلتقيان. «$\frac{١}{٢}$ ساعة ، ٣٠ كم من نقطة بداية الجسم ؟»

٢٤ مدينتان ؟ ، ب على الطريق الساحلى المسافة بينهما ١٢٠ كم ، تحركت سيارة من المدينة ؟ متجهه إلى المدينة ب بسرعة ٨٨ كم/س وفى نفس اللحظة قامت سيارة أخرى من المدينة ب متجهة إلى المدينة ؟ بسرعة ٧٢ كم/س.
أوجد متى وأين تتقابل السيارتان. «$\frac{٣}{٤}$ ساعة ، ٦٦ كم من ؟»

٢٥ قطاران يسيران على خطين متوازيين والمسافة بينهما ٣,٥ كم فإذا كانت سرعة أحدهما ٥٠ كم/س وسرعة الآخر ٢٠ كم/س. فبعد كم من الزمن يتجاوران ؟ إذا كانا :

(١) يسيران فى اتجاهين متضادين وجهًا لوجه.

(٢) يسيران فى اتجاه واحد (الأسرع فى الخلف).

«بعد ٣ دقائق ، بعد ٧ دقائق»

---

٢٦ تتحرك سيارتان أ ، ب على طريق مستقيم بالسرعتين ٦٠ كم/س ، ٩٠ كم/س وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

(١) أوجد سرعة ب بالنسبة إلى أ

(٢) أوجد سرعة أ بالنسبة إلى ب

(٣) إذا كانت المسافة بينهما ١٠ كم فبعد كم دقيقة يمكن أن يلتقيا ؟

«٣٠ كم/س فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، ٣٠ كم/س فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، ٢٠ دقيقة»

---

٢٧ يسير طارق فى طريق مستقيم بسرعة ٦٠ م/د شاهد أيمن الذى يسير فى نفس الطريق بسرعة ٤٠ م/د فإذا كان البعد بينهما ١٠٠ متر. فبعد كم دقيقة يلتقيان ؟ إذا كانا :

(١) يسيران فى اتجاه واحد (الأسرع فى الخلف).

(٢) يسيران فى اتجاهين متضادين.

«٥ ، ١ دقيقة»

---

٢٨ تتحرك سيارتان على نفس الطريق المستقيم فى اتجاهين متضادين فإذا كانت المسافة بينهما ٤ كم وسرعة إحدى السيارتين ٧٠ كم/س وتقابلتا بعد دقيقتين. فما هى السرعة الفعلية للسيارة الأخرى ؟

«٥٠ كم/س»

---

٢٩ تتحرك طائرتان بنفس السرعة فى مسار مستقيم ، بحيث تتابع إحداهما الأخرى والمسافة بينهما ٥٠٠ متر وفى لحظة ما أطلقت الطائرة الخلفية صاروخًا على الطائرة الأمامية فأصابها بعد مرور ثانيتين من إطلاقه. فما هى سرعة دفع الصاروخ ؟

«٢٥٠ م/ث»

---

٣٠ طائرة مقاتلة تلاحق قاذفة قنابل ويسيران على نفس الخط المستقيم ولهما نفس الاتجاه. فإذا كانت المسافة بينهما ٢٠ كم عندما أطلقت المقاتلة صاروخًا والذى كانت سرعته الكلية ١٢٠٠ كم/س فأصاب القاذفة بعد ٤ دقائق فما هى سرعة كل من الطائرتين ؟

«٩٠٠ كم/س»

٣١ قامت سيارة (أ) تتحرك على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/س ، لما ضاعفت السيارة (أ) سرعتها وأعادت القياس وجدت أن سرعة (ب) أصبحت ١٨٠ كم/س.
أوجد السرعة الفعلية لكل من السيارتين.
«٦٠ كم/س ، ٦٠ كم/س»

---

٣٢ سيارة (أ) متحركة على طريق مستقيم رصدت سرعة سيارة أخرى (ب) قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٣٠ كم/س ، ولما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف وأعادت رصد السيارة (ب) فوجدت أن سرعتها ١١٠ كم/س.
فما هى السرعة الفعلية لكل من السيارتين.
«٤٠ كم/س ، ٩٠ كم/س»

---

٣٣ قامت سيارة (أ) متحركة على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/ساعة ولما خفضت السيارة (أ) سرعتها حتى أصبحت $\frac{٣}{٤}$ سرعتها الأولى وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة (ب) أصبحت ١٠٠ كم/ساعة.
فما هى السرعة الفعلية لكل من السيارتين ؟
«٨٠ كم/س ، ٤٠ كم/س»

---

٣٤ أثناء حركة سيارة الشرطة (أ) على طريق مستقيم راقبت السيارة (ب) المتحركة فى الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة مقدارها ١٤٠ كم/ساعة وفى نفس اللحظة راقبت سيارة الشرطة (أ) عربة النقل (حـ) المتحركة فى نفس الاتجاه فبدت وكأنها تتحرك بسرعة مقدارها ٦٠ كم/ساعة.
احسب سرعة عربة النقل (حـ) بالنسبة إلى السيارة (ب)
«٢٠٠ كم/س فى اتجاه سيارة الشرطة»

---

٣٥ قامت سيارة شرطة متحركة بسرعة منتظمة على طريق أفقى بقياس السرعة النسبية لشاحنة تتحرك أمامها وفى نفس الاتجاه فوجدتها ٦٠ كم/س ولما زيدت سرعة سيارة الشرطة إلى الضعف وأعادت القياس فبدت الشاحنة وكأنها ساكنة.
أوجد السرعة الفعلية لكل من سيارة الشرطة والشاحنة.
«٦٠ كم/س ، ١٢٠ كم/س»

٣٦ عندما كانت سيارة الشرطة (أ) تتحرك على طريق مستقيم بسرعة ٤٢ كم/س شاهدت سيارة أخرى (ب) ودراجة (حـ) تسيران على نفس الطريق فبدت لها السيارة (ب) كما لو كانت قادمة فى الاتجاه المضاد بسرعة ١٣٢ كم/س وبدت لها الدراجة (حـ) كما لو كانت تتقهقر بسرعة ١٢ كم/س. أوجد السرعة الفعلية لكل من السيارة (ب) والدراجة (حـ).

«٩٠ كم/ س عكس اتجاه حركة سيارة الشرطة ، ٣٠ كم/ س فى نفس اتجاه حركة سيارة الشرطة»

---

٣٧ يتحرك طراد وسفينة على مسار مستقيم واحد بحيث كان كل منهما يتحرك نحو الآخر وقد راقب الطراد حركة السفينة وعندما كانت على بُعد ٢٠ كم منه كانت سرعة السفينة ٤٠ كم/ساعة وسرعة الطراد ٥٢ كم/ساعة وعندئذ أطلق الطراد عليها طوربيدًا بسرعة ١٠٨ كم/ساعة. احسب الزمن الذى يمضى من لحظة إطلاق الطوربيد حتى لحظة إصابة السفينة. «٦ دقائق»

---

٣٨ مر قطار أ طوله ٨٠ مترًا يتحرك بسرعة ١٢٠ كم/س بقطار آخر ب طوله ١٢٠ مترًا أوجد الزمن اللازم لكى يمر القطار أ بالكامل من القطار ب إذا كان القطار ب :

(١) ساكنًا. (٢) متحركًا بسرعة ٧٠ كم/س فى نفس اتجاه حركة القطار أ

(٣) متحركًا بسرعة ٨٠ كم/س فى عكس اتجاه حركة القطار أ

«٦ ثوانٍ ، ١٤,٤ ثانية ، ٣,٦ ثانية»

---

٣٩ يتحرك قطار أ بسرعة ١٠٠ كم/س ، لحق بقطار آخر ب طوله ١٩٠ مترًا يتحرك بسرعة ٦٠ كم/س على شريط موازٍ فمر عليه بالكامل فى ٢٧ ثانية.

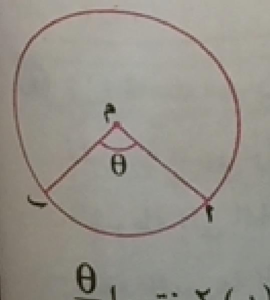
أوجد طول القطار أ والزمن الذى يستغرقه فى عبور كوبرى طوله ٩٠ مترًا.

«١١٠ أمتار ، ٧,٢ ثانية»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٤٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



جسيم تحرك من نقطة أ إلى نقطة ب على دائرة طول نصف قطرها نق فإن الإزاحة الحادثة = ...

(أ) نق θ° (ب) ٢ نق θ° (جـ) نق جا θ (د) ٢ نق جا $\frac{\theta}{2}$

② إذا تحرك جسم مسافة (ف) بسرعة ($ع_1$) ثم تحرك فى نفس الاتجاه مسافة (ف) بسرعة ($ع_2$) فإن السرعة المتوسطة تكون ....

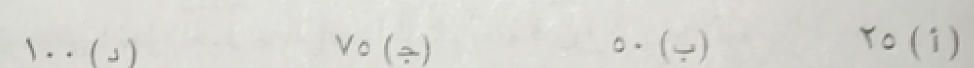
(أ) $\frac{1}{2}(ع_1 + ع_2)$ (ب) $\frac{1}{2}ف\left(\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2}\right)$

(جـ) $\frac{2\, ع_1\, ع_2}{ع_1 + ع_2}$ (د) $\frac{2}{ف}(ع_1 + ع_2)$

③ وُجد أنه لو تحرك جسم بسرعة ١٤ كم/س بدلًا من ١٠ كم/س لقطع مسافة أكثر بمقدار ٢٠ كم فإن المسافة التى يقطعها الجسم بالسرعة ١٤ كم/س هى .... كم

(أ) ٥٠ (ب) ٥٦ (جـ) ٧٠ (د) ٨٠

④ قطاران لهما نفس الطول يسيران فى نفس الاتجاه فى خطين متوازيين الأول بسرعة ٤٦ كم/س والثانى بسرعة ٣٦ كم/س فإذا لحق القطار السريع القطار البطىء وتخطاه بالكامل فى ٣٦ ثانية فإن طول كل قطار = ... متر.



(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ١٠٠

⑤ متسابق يلف مضمار ثابت عبارة عن خطين متوازيين طول كل منهما ٩٦ متر وتتصل نهايتى كل طرف بنصف دائرة طول نصف قطرها ٤٩ متر إذا أتم المتسابق دورة كاملة فى ١٠٠ ثانية فإن مقدار متجه السرعة المتوسطة = ... م/ث ($\pi = \frac{22}{7}$)

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) صفر

⑥ قطار متحرك بسرعة منتظمة مقدارها ١٥ م/ث يعبر رجل ساكن فى ٢٧ ثانية فإن المدة الزمنية التى يعبر بها نفس القطار بالكامل رصيف طوله ١٥٠ متر تساوى .... ثانية.

(أ) ٢٧ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٧ (د) ٤٢

⑦ تحركت سيارة مسافة ٣٠ كم بسرعة منتظمة ٣٠ كم/س ثم تحركت فى نفس الاتجاه مسافة ٩٠ كم بسرعة (ع) فإذا كانت سرعتها المتوسطة خلال الرحلة كلها هى ٤٠ كم/س فإن : ع = ... كم/س

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ١٢٠

⑧ قطاران يسيران فى اتجاهين متضادين يعبران رجل ساكن على الرصيف فى زمنين ٢٧ ثانية ، ١٧ ثانية على الترتيب ويعبران بعضهما فى ٢٣ ثانية فإن النسبة بين سرعتيهما ....

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ١٢ (جـ) ٣ : ٢ (د) ٣ : ٤

⑨ إذا كان : $\overleftarrow{ع}_م$ ، $\overleftarrow{ع}_ب$ متجهى سرعة جسمين يتحركان فى الاتجاهين $\overleftarrow{وحـ}$ ، $\overleftarrow{حـو}$ على الترتيب فإن اتجاه $\overleftarrow{ع}_{مب}$ يكون ....

(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{وحـ}$ دائمًا.

(ب) فى اتجاه $\overleftarrow{وحـ}$ فقط عندما $\| \overleftarrow{ع}_م \| > \| \overleftarrow{ع}_ب \|$

(جـ) فى اتجاه $\overleftarrow{حـو}$ دائمًا.

(د) فى اتجاه $\overleftarrow{حـو}$ فقط عندما $\| \overleftarrow{ع}_م \| > \| \overleftarrow{ع}_ب \|$

٤١ طائرة هليوكوبتر تطير فى خط مستقيم بسرعة ١٢٦ كم/س فوق قطار يتحرك فى نفس الاتجاه فوصلت الطائرة من مؤخرة القطار إلى مقدمته خلال ١٥ ثانية ولما خفض قائد الطائرة سرعتها إلى النصف أصبحت الطائرة فوق مؤخرة القطار خلال ٢٠ ثانية. أوجد طول القطار بالمتر.

«١٥٠ مترًا»

٤٢ يتحرك رجل على كوبرى $\overline{أب}$ ، وعندما قطع $\frac{٣}{٨}$ طول الكوبرى من جهة أ سمع صوت صفير قطار يتحرك خلفه بسرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س نحو نقطة أ فإذا تحرك الرجل نحو القطار فإن القطار سيصدمه عند نقطة أ مباشرة. أوجد السرعة المنتظمة التى يتحرك بها الرجل قبل أن يصدمه القطار مباشرة عند نقطة ب

«١٥ كم/س»



الدرس 2

الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

إذا تحرك جسيم بحيث يتغير متجه سرعته من لحظة لأخرى فى المقدار أو الاتجاه أو فى كليهما فإنه يقال أن الجسيم يتحرك حركة متغيرة أو أنه يتحرك بعجلة (تسارع).

تعريف متجه العجلة

هو المعدل الزمنى للتغير فى متجه السرعة أ، هو التغير فى متجه السرعة فى وحدة الزمن.

فإذا كان : $\overleftarrow{ع_١}$ ، $\overleftarrow{ع_٢}$ متجهى سرعة جسيم عند لحظتين متتاليتين $ن_١$ ، $ن_٢$ على الترتيب

فإن : متجه العجلة المتوسطة $\overleftarrow{حـ_م} = \frac{\overleftarrow{ع_٢} - \overleftarrow{ع_١}}{ن_٢ - ن_١}$

وفى حالة أن الفترة الزمنية ($ن_٢ - ن_١$) تكون متناهية فى الصغر فإن متجه العجلة فى هذه الحالة يعرف بمتجه العجلة اللحظية (التسارع اللحظى) ويرمز له بالرمز ($\overleftarrow{حـ}$)

أنواع الحركة فى خط مستقيم

الحركة المنتظمة هى حركة بسرعة ثابتة مقدارًا واتجاهًا بمرور الزمن.

الحركة المتغيرة هى حركة تتغير فيها سرعة الجسيم بمرور الزمن.

الحركة المنتظمة التغير هى حركة تتغير فيها سرعة الجسيم بمعدل زمنى ثابت.

أى أن متجه عجلة الجسيم يكون ثابتًا مقدارًا واتجاهًا بمرور الزمن.

* من المعروف أن اتجاه السرعة دائمًا فى نفس اتجاه الحركة لجسيم أما اتجاه العجلة فإنه قد يكون :

١ فى نفس اتجاه الحركة وهنا فإن سرعة الجسيم تتزايد بمرور الزمن وتكون حـ لها نفس إشارة ع فى القياس الجبرى لمتجهى العجلة والسرعة.

٢ فى عكس اتجاه الحركة وهنا فإن سرعة الجسيم تتناقص بمرور الزمن وتكون حـ لها عكس إشارة ع فى القياس الجبرى لمتجهى العجلة والسرعة.

وحدات قياس مقدار العجلة

∵ وحدة قياس مقدار متجه العجلة = $\frac{\text{وحدة قياس مقدار متجه السرعة}}{\text{وحدة قياس الزمن}}$

∴ يمكن قياس مقدار العجلة بالوحدات الآتية :

سم/ ث / ث (وتكتب سم/ث^{٢}) أ، متر/ ث/ث (وتكتب متر/ ث^{٢})

أ، كم/ س/س (وتكتب كم/س^{٢}) أ، كم/س/ ث أ، متر/ث/دقيقة ... إلخ.

مثال ١

حول عجلة مقدارها ١ كم/ س/ ث إلى :

١ متر/ث^{٢}. ٢ سم/ث^{٢}. ٣ كم/س^{٢}. ٤ متر/ث/دقيقة.

الحل

١ $\text{١ كم/س/ث} = \frac{\text{١ كم}}{\text{س} \times \text{ث}} = \frac{\text{١٠٠٠ متر}}{\text{٦٠} \times \text{٦٠ ث} \times \text{ث}} = \frac{٥}{١٨} \text{ متر/ث}^{٢}$

٢ $\text{١ كم/س/ث} = \frac{\text{١ كم}}{\text{س} \times \text{ث}} = \frac{\text{١٠٠٠} \times \text{١٠٠ سم}}{\text{٦٠} \times \text{٦٠ ث} \times \text{ث}} = \frac{٢٥٠}{٩} \text{ سم/ث}^{٢}$

٣ $\text{١ كم/س/ث} = \frac{\text{١ كم}}{\text{س} \times \text{ث}} = \frac{\text{١ كم}}{\text{س} \times \frac{١}{٦٠ \times ٦٠} \text{س}} = \text{٣٦٠٠ كم/س}^{٢}$

٤ $\text{١ كم/س/ث} = \frac{\text{١ كم}}{\text{س} \times \text{ث}} = \frac{\text{١٠٠٠ متر}}{\text{٦٠ دقيقة} \times \text{ث}} = \frac{٥٠}{٣} \text{ متر/ث/دقيقة}$

ماذا يعنى قولنا بأن :

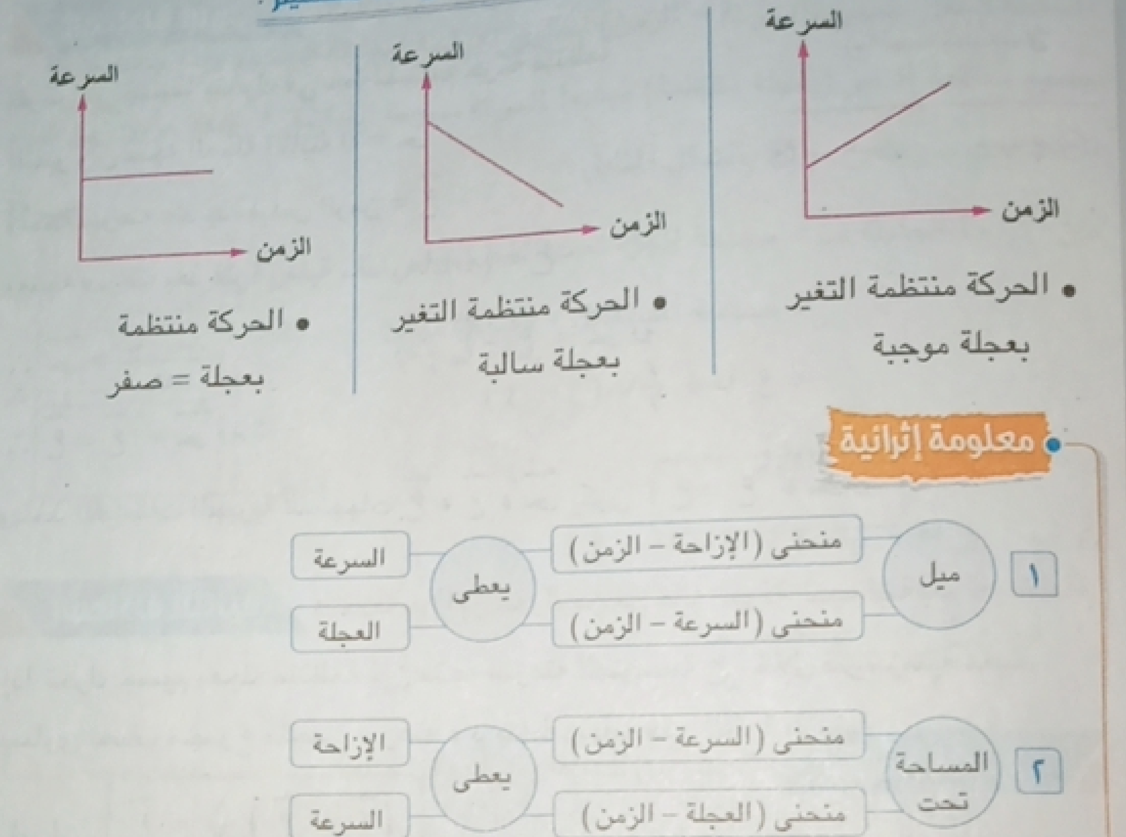
١ جسيمًا يتحرك فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٦ سم/ث^{٢} فى اتجاه حركته ؟

– ذلك يعنى أن مقدار سرعة هذا الجسيم يزداد أثناء حركته زيادة منتظمة بمعدل ٦ سم/ث كل ثانية.

٢ جسيمًا يتحرك فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٨ كم/س/دقيقة فى عكس اتجاه حركته ؟

– ذلك يعنى أن مقدار سرعة هذا الجسيم يتناقص بانتظام أثناء حركته بمعدل ٨ كم/س كل دقيقة.

* التمثيل البيانى لمنحنى السرعة - الزمن لحركة جسيم فى خط مستقيم :



- الحركة منتظمة التغير بعجلة موجبة
- الحركة منتظمة التغير بعجلة سالبة
- الحركة منتظمة بعجلة = صفر

معلومة إثرائية

١ ميل منحنى (الإزاحة – الزمن) يعطى السرعة

ميل منحنى (السرعة – الزمن) يعطى العجلة

٢ المساحة تحت منحنى (السرعة – الزمن) يعطى الإزاحة

المساحة تحت منحنى (العجلة – الزمن) يعطى السرعة

معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

وسوف ندرس الآن معادلات الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة (الحركة منتظمة التغير).
وقد سبق دراسة هذه المعادلات فى مادة الفيزياء بالصف الأول الثانوى وهناك رموز سوف نستخدمها فى هذه القوانين نلخصها فيما يلى :

الرمز	ما يدل عليه
$\vec{\text{ع}}_{\cdot}$	متجه سرعة الجسيم عند بدء قياس الزمن.
$\vec{\text{ع}}$	متجه سرعة الجسيم فى نهاية الفترة الزمنية (ن).
$\vec{\text{ف}}$	متجه الإزاحة التى طرأت على الجسيم خلال الفترة الزمنية ن.
$\vec{\text{ح}}$	متجه العجلة.

المعادلة الأولى «العلاقة بين السرعة والزمن فى حالة الحركة المستقيمة بعجلة منتظمة»

نفرض أن جسيمًا يتحرك فى خط مستقيم حركة منتظمة التغير وأن متجه العجلة الثابتة له = $\overrightarrow{\text{ح}}$

ومتجه سرعته عند بدء قياس الزمن = $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{.}}$

ومتجه سرعته بعد فترة زمنية مقدارها (ن) = $\overrightarrow{\text{ع}}$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ح}} = \frac{\overrightarrow{\text{ع}} - \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{.}}}{\text{ن}} \qquad \therefore \overrightarrow{\text{ع}} - \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{.}} = \overrightarrow{\text{ح}}\,\text{ن}$$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{ع}}_{\text{.}} + \overrightarrow{\text{ح}}\,\text{ن}$$

وبأخذ القياسات الجبرية للمتجهات $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{.}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}}$ يكون $\boxed{\text{ع} = \text{ع}_{\text{.}} + \text{ح ن}}$

المعادلة الثانية «العلاقة بين الإزاحة والزمن فى حالة الحركة المستقيمة بعجلة منتظمة»

إذا تحرك جسيم بعجلة منتظمة فإن متجه سرعته المتوسطة $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ خلال فترة زمنية معينة يساوى نصف مجموع متجهى سرعته عند بداية ونهاية هذه الفترة الزمنية

أى أن $\boxed{\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{.}} + \overrightarrow{\text{ع}}\right)}$

وباستخدام القياسات الجبرية يكون : $\text{ع}_{\text{م}} = \frac{1}{2}(\text{ع}_{\text{.}} + \text{ع})$ ولكن من القانون الأول :

$$\text{ع} = \text{ع}_{\text{.}} + \text{ح ن}$$

$$\therefore \text{ع}_{\text{م}} = \frac{1}{2}(\text{ع}_{\text{.}} + \text{ع}_{\text{.}} + \text{ح ن})$$

$$\therefore \text{ع}_{\text{م}} = \frac{1}{2}(2\,\text{ع}_{\text{.}} + \text{ح ن})$$

$$\therefore \text{ع}_{\text{م}} = \text{ع}_{\text{.}} + \frac{1}{2}\text{ح ن}$$

، $\because$ الإزاحة = متجه السرعة المتوسطة × الزمن

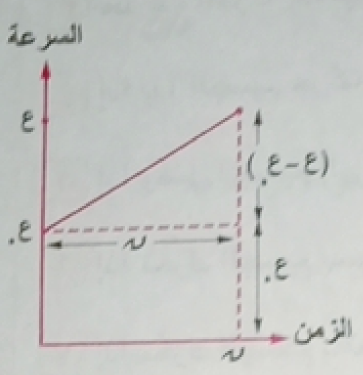
$$\therefore \text{ف} = \text{ع}_{\text{م}} \times \text{ن}$$

$$\therefore \text{ف} = \left(\text{ع}_{\text{.}} + \frac{1}{2}\text{ح ن}\right) \times \text{ن}$$

$$\therefore \boxed{\text{ف} = \text{ع}_{\text{.}}\,\text{ن} + \frac{1}{2}\text{ح ن}^2}$$

طريقة أخرى لاستنتاج المعادلة السابقة

المساحة أسفل منحنى (السرعة – الزمن) تساوى الازاحة الحادثة للجسيم وإذا كانت حركة جسيم منتظمة التغير (بعجلة منتظمة) مبتدءاً الحركة بسرعة ابتدائية $ع_.$ وبعد مرور زمن قدره $ن$ أصبحت سرعته $ع$ ممثلة بالشكل المقابل



فإن الازاحة الحادثة ف = مساحة الجزء تحت الخط البيانى

= مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$= ع_. ن + \frac{1}{2} ن (ع - ع_.)$

وبالتعويض من المعادلة الأولى

$\therefore ف = ع_. ن + \frac{1}{2} ن (ع_. + جـ ن - ع_.)$

$\therefore$ $\boxed{ف = ع_. ن + \frac{1}{2} جـ ن^2}$

المعادلة الثالثة

«العلاقة بين السرعة والإزاحة فى حالة الحركة المستقيمة بعجلة منتظمة»

$\because ع = ع_. + جـ ن$ (١)

، $ف = ع_. ن + \frac{1}{2} جـ ن^2$ (٢)

$\therefore$ بحذف ن من المعادلتين (١) ، (٢) كما يلى :

بتربيع (١) :

$\therefore ع^2 = ع_.^2 + 2 ع_. جـ ن + جـ^2 ن^2$

$\therefore ع^2 = ع_.^2 + 2 جـ (ع_. ن + \frac{1}{2} جـ ن^2)$

وبالتعويض من (٢) :

$\therefore$ $\boxed{ع^2 = ع_.^2 + 2 جـ ف}$

ملاحظــات :

1. المعادلات السابقة تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد احداها بمعلومية الثلاثة الأخرى
2. إشارة كل من ع ، ع. ، حـ ، ف تتحدد متى حددنا اتجاه متجه الوحدة $\overline{ى}$
3. عند بدء الحركة لجسيم يكون : ن = صفر
4. إذا بدأ الجسيم حركته من السكون فإن : ع. = صفر
5. إذا وصل الجسيم إلى أقصى بعد (أو إذا سكن الجسيم) فإن : ع = صفر
6. إذا تحرك الجسيم بسرعة منتظمة فإن : حـ = صفر
7. إذا تحرك الجسيم بأقصى سرعة له فإن : حـ = صفر
8. إذا عاد الجسيم إلى موضعه الأصلى فإن : ف = صفر
9. فى حالة معرفة ع. ، ع ، ن فإنه ليس من الضرورى إيجاد العجلة حـ لحساب الإزاحة ف حيث يمكن استخدام المعادلة $ف = \frac{ع. + ع}{٢} \times ن$

   أى ف = $ع_م$ × ن (المستخدمة فى إثبات المعادلة الثانية)
10. اتجاه السرعة دائمًا فى اتجاه الحركة أما اتجاه العجلة فقد يكون فى اتجاه الحركة (تسارع) أو فى عكس اتجاه الحركة (تقصير).
11. أى حركة تقصيرية لا يمكن أن تستمر إلا لفترة محدودة من الزمن ثم تنقلب بعدها إلى حركة متسارعة فى الاتجاه المضاد.

مثال ٢

تتحرك سيارة فى خط مستقيم مبتدئة من السكون بعجلة منتظمة مقدارها $\frac{١}{٢}$ م/ث^{٢} فى نفس اتجاه حركة السيارة أوجد :

1. مقدار سرعة السيارة بعد دقيقة واحدة بالكم/س
2. الزمن بالثوانى الذى تستغرقه السيارة حتى تصبح سرعتها ٩٠ كم/س

الحـــل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة السيارة

∴ ع. = صفر ، حـ = $\frac{١}{٢}$ م/ث^{٢} ، ن = ٦٠ ثانية

١ ∵ ع = ع. + حـ ن ∴ ع = صفر + $\frac{١}{٢}$ × ٦٠ = ٣٠ م/ث

∴ ع = ٣٠ × $\frac{١٨}{٥}$ = ١٠٨ كم/س

٢ ∵ ع = ع. + حـ ن ∴ ٩٠ × $\frac{٥}{١٨}$ = صفر + $\frac{١}{٢}$ × ن

∴ ٢٥ = $\frac{١}{٢}$ ن ∴ ن = ٥٠ ثانية

مثال ٣

بدأ جسيم حركته فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٥ سم/ث^{٢} وبسرعة ابتدائية ٢٠ سم/ث فى عكس اتجاه العجلة أوجد سرعته وإزاحته بعد :

١ ٣ ثوانٍ. ٢ ٤ ثوانٍ. ٣ ٦ ثوانٍ. ٤ ٩ ثوانٍ.

الحـــل

نعتبر أن اتجاه السرعة الابتدائية هو الاتجاه الموجب

∴ ع. = ٢٠ سم/ث ، حـ = −٥ سم/ث^{٢}

١ ع = ع. + حـ ن = ٢٠ + (−٥) × ٣ = ٥

∴ السرعة بعد ٣ ثوانٍ = ٥ سم / ث فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ع.}$

، ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ حـ ن^{٢} = ٢٠ (٣) + $\frac{١}{٢}$ (−٥) (٣)^{٢} = ٣٧$\frac{١}{٢}$ سم

٢ ع = ع. + حـ ن = ٢٠ + (−٥) × ٤ = صفر

∴ الجسيم يسكن لحظيًا بعد ٤ ثوانٍ.

، ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ حـ ن^{٢} = ٢٠ (٤) + $\frac{١}{٢}$ (−٥) (٤)^{٢} = ٤٠ سم

٣ $ع = ع_. + حـ ن = ٢٠ + (-٥) × ٦ = -١٠$

∴ السرعة بعد ٦ ثوانٍ = ١٠ سم/ث فى عكس اتجاه $\overleftarrow{ع}$.

، $ف = ع_. ن + \frac{1}{2} حـ ن^{2} = ٢٠ (٦) + \frac{1}{2} (-٥) (٦)^{2} = ٣٠$ سم

٤ $ع = ع_. + حـ ن = ٢٠ + (-٥) × ٩ = -٢٥$

∴ السرعة بعد ٩ ثوانٍ = ٢٥ سم/ث فى عكس اتجاه $\overleftarrow{ع}$.

، $ف = ع_. ن + \frac{1}{2} حـ ن^{2} = ٢٠ × ٩ + \frac{1}{2} × (-٥) × ٩^{2} = -٢٢,٥$

أى أن : الجسيم تخطى المكان الذى بدأ منه حركته بمسافة ٢٢,٥ متر فى عكس اتجاه $\overleftarrow{ع}$

مثال ٤

يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٢ سم /ث^{2} فى اتجاه حركته وبعد أن قطع مسافة ٢,٢٥ متر أصبحت سرعته ٥٠ سم/ث فما هى سرعته الابتدائية ؟

الحل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الجسيم ، حـ = ٢ سم /ث^{2}

، ف = ٢٢٥ سم ، ع = ٥٠ سم/ث

، ∵ $ع^{2} = ع_.^{2} + ٢ حـ ف$ ∴ $(٥٠)^{2} = ع_.^{2} + ٢ × ٢ × ٢٢٥$

∴ $ع_.^{2} = ٢٥٠٠ - ٩٠٠ = ١٦٠٠$ ∴ $ع_. = \pm ٤٠$ سم/ث

، ∵ $ع_.$ فى الاتجاه الموجب

∴ $ع_.$ (السرعة الابتدائية للجسيم) = ٤٠ سم/ث

السرعة المتوسطة المقطوعة خلال الثانية النونية للحركة منتظمة التغير

١ لإيجاد المسافة التى قطعها الجسيم خلال الثانية النونية نوجد المسافة التى يكون قد قطعها خلال ($ن$) ثانية الأولى والمسافة التى يكون قد قطعها خلال ($ن - ١$) ثانية الأولى والفرق بينهما هو المسافة المقطوعة خلال الثانية النونية.

أى أن المسافة المقطوعة خلال الثانية النونية = $ف_{ن} - ف_{ن-١}$

فمثلًا : المسافة المقطوعة خلال الثانية الخامسة = $ف_{٥} - ف_{٤}$

، المسافة المقطوعة خلال الثانيتين الثامنة والتاسعة = $ف_{٩} - ف_{٧}$

٢ السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية ما = سرعته اللحظية فى منتصف هذه الفترة

فمثلًا : السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة = $ع_{.} + ٤,٥ \, حـ$

، السرعة المتوسطة خلال الثانيتين التاسعة والعاشرة = $ع_{.} + ٩ \, حـ$

٣ المسافة = السرعة المتوسطة × الزمن

فمثلًا : المسافة المقطوعة خلال الثانية الخامسة = $(ع_{.} + ٤,٥ \, حـ) \times ١$

، المسافة المقطوعة خلال الثانيتين التاسعة والعاشرة = $(ع_{.} + ٩ \, حـ) \times ٢$

فمثلًا :

١ إذا قطع جسيم مسافة ٥ أمتار خلال الثانية الرابعة (١ ثانية)

فإن سرعته المتوسطة = $\frac{٥}{١}$ = ٥ متر/ث

وتكون مساوية لسرعة الجسيم بعد $٣\frac{١}{٢}$ ثانية من بدء الحركة

$\therefore ٥ = ع_{.} + ٣\frac{١}{٢} \, حـ$

٢ إذا قطع جسيم مسافة ٨ سم خلال الثانيتين الخامسة والسادسة (٢ ثانية)

فإن سرعته المتوسطة = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم / ث

وتكون مساوية لسرعة الجسيم بعد ٥ ثوانٍ

$\therefore ٤ = ع_{.} + ٥ \, حـ$

٣ إذا قطع جسيم مسافة ١٨ مترًا خلال الثوانى الثلاث السابعة والثامنة والتاسعة (٣ ثوانٍ)

$ع_م = ٦ م/ث$

∴ سرعته المتوسطة = $\frac{١٨}{٣}$ = ٦ م/ث وتكون مساوية لسرعة الجسيم بعد $٧\frac{١}{٢}$ ث

∴ ٦ = ع. + $٧\frac{١}{٢}$ حـ

مثال ٥

بدأ جسيم حركته من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع مسافة ٣٨ سم فى الثانية العاشرة من حركته.

أوجد مقدار عجلته والمسافة التى قطعها فى الثانية الخامسة من حركته.

الحل

السرعة المتوسطة خلال الثانية العاشرة

= $\frac{٣٨}{١}$ = ٣٨ سم/ث

وهى تساوى سرعة الجسيم فى منتصف الثانية العاشرة أى بعد ٩,٥ ثانية من بدء الحركة.

، ∵ ع = ع. + ن حـ

∴ ٣٨ = ٠ + ٩,٥ حـ

∴ حـ = $\frac{٣٨}{٩,٥}$ = ٤ سم/ث^٢

ولإيجاد المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة نقول :

السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة = السرعة فى منتصف الثانية الخامسة = السرعة بعد ٤,٥ ثانية من بدء الحركة

، ∵ ع = ع. + ن حـ

∴ $ع_م$ = ٠ + ٤ × ٤,٥ = ١٨ سم/ث.

، ∵ ف = $ع_م$ × ن

∴ ف = ١٨ × ١ = ١٨ سم

∴ المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة = ١٨ سم

حل آخر :

∵ $ف_{١٠} - ف_{٩} = ٣٨$ ∴ (صفر + $\frac{١}{٢}$ حـ × ١٠٠) − (صفر + $\frac{١}{٢}$ حـ × ٨١) = ٣٨

∴ $\frac{١}{٢}$ حـ × ١٩ = ٣٨ ∴ حـ = ٤ سم/ث^{٢}

∴ المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة = $ف_{٥} - ف_{٤}$

= (صفر + $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢٥) − (صفر + $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٦)

= ٥٠ − ٣٢ = ١٨ سم

مثال ٦

يتحرك جسيم بعجلة منتظمة فى اتجاه ثابت هو نفس اتجاه سرعته الابتدائية فإذا قطع الجسيم مسافة ١٠٠ سم فى الثوانى الخمس الأولى من حركته ، وقطع مسافة ٩٠ سم فى الثوانى الثامنة والتاسعة والعاشرة من حركته.

أوجد عجلة الحركة وكذا سرعته الابتدائية.

الحـــل

ع٠
و ٥ ٧ ٨ ٩ ١٠
العاشرة التاسعة الثامنة
$٢\frac{١}{٢}$ $٨\frac{١}{٢}$

نعتبر اتجاه السرعة الابتدائية هو الاتجاه الموجب ع$_{م}$ فى الثوانى الخمس الأولى = $\frac{١٠٠}{٥}$ = ٢٠ سم/ث

وهى سرعته بعد ٢,٥ ثانية من بدء الحركة

، ∵ ع = ع$_{٠}$ + ىحـ

∴ ٢٠ = ع$_{٠}$ + ٢,٥ حـ (١)

، ع$_{م}$ فى الثوانى الثامنة والتاسعة والعاشرة = $\frac{٩٠}{٣}$ = ٣٠ سم/ث

وهى سرعته بعد ٨,٥ ثانية من بدء الحركة

، ∵ ع = ع$_{٠}$ + ىحـ

∴ ٣٠ = ع$_{٠}$ + ٨,٥ حـ (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح : ∴ ١٠ = ٦ حـ ∴ حـ = $\frac{٥}{٣}$ سم/ث^{٢}

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٢٠ = ع$_{٠}$ + $\frac{٥}{٢}$ × $\frac{٥}{٣}$ ∴ ع$_{٠}$ = $١٥\frac{٥}{٦}$ سم/ث

مثال ٧

يتحرك جسيم فى اتجاه ثابت بسرعة ابتدائية ٢٠ سم/ث وعجلة منتظمة ٨ سم/ث^{٢} فى اتجاه سرعته

أوجد : [١] المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية الخامسة فقط.

[٢] المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانيتين السابعة والثامنة معًا.

الحل

[١] نعتبر اتجاه السرعة الابتدائية هو الاتجاه الموجب

، $ع_{.}$ = ٢٠ سم/ث ، حـ = ٨ سم/ث^{٢}

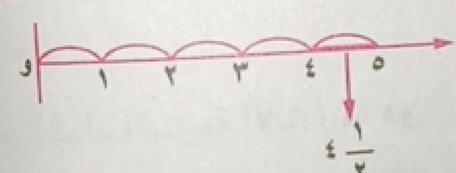
، ∵ ف = $ع_{.}$ ن + $\frac{١}{٢}$ حـ ن^{٢}

∴ $ف_{٥}$ (خلال ٥ ثوانى الأولى) = ٢٠ × ٥ + $\frac{١}{٢}$ (٨) (٥)^{٢} = ٢٠٠ سم

، $ف_{٤}$ (خلال ٤ ثوانى الأولى) = ٢٠ × ٤ + $\frac{١}{٢}$ (٨) (٤)^{٢} = ١٤٤ سم

∴ المسافة التى قطعها الجسيم خلال الثانية الخامسة فقط = ٢٠٠ − ١٤٤ = ٥٦ سم

حل آخر :



السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة

= السرعة فى منتصف الثانية الخامسة

= السرعة بعد ٤,٥ ثانية من بدء الحركة

، ∵ ع = $ع_{.}$ + حـ ن

∴ $ع_{م}$ = ٢٠ + ٨ × ٤,٥ = ٥٦ سم/ث

∴ المسافة المقطوعة خلال الثانية الخامسة = $ع_{م}$ × الزمن = ٥٦ × ١ = ٥٦ سم

[٢] المسافة التى قطعها الجسيم خلال الثانيتين السابعة والثامنة معًا

= $ف_{٨}$ − $ف_{٦}$ = ٢٠ × ٨ + $\frac{١}{٢}$ (٨) (٨)^{٢} − [٢٠ × ٦ + $\frac{١}{٢}$ (٨) (٦)^{٢}] = ١٥٢ سم

حل آخر :

السرعة المتوسطة خلال الثانيتين السابعة والثامنة معًا = السرعة بعد ٧ ثوانٍ من بدء الحركة

، ∵ ع = $ع_{.}$ + حـ ن

∴ $ع_{م}$ = ٢٠ + ٨ × ٧ = ٧٦ سم/ث

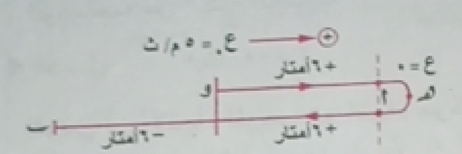
∴ المسافة المقطوعة خلال الثانيتين السابعة والثامنة معًا = $ع_{م}$ × الزمن

= ٧٦ × ٢ = ١٥٢ سم

مثال ٨

كرة صغيرة تم دفعها فى عكس اتجاه الرياح بسرعة ٥ متر/ث فتحركت فى خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة ٢ متر/ث^{٢} أوجد الزمن الذى يمضى من لحظة الدفع حتى تصبح الكرة على بُعد ٦ أمتار من مكان القذف.

الحل



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه سرعة الدفع ع.

∴ ع. = ٥ متر/ث

، حـ = −٢ متر/ث^{٢} وعندما تكون الكرة على بُعد ٦ أمتار من مكان الدفع (و) فإن :

ف = + ٦ أ، ف = −٦ حيث ف الموجبة تعنى أن الكرة تقع عند أ فى جهة الإزاحة الموجبة أى فى الجانب الذى دفعت ناحيته ، ف السالبة تعنى أن الكرة تقع عند ب فى جهة الإزاحة السالبة أى فى الجانب الآخر بالنسبة لمكان الدفع (و).

١ إذا كانت : ف = + ٦ :

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ حـ ن^{٢} ∴ ٦ = ٥ ن − $\frac{١}{٢}$ × ٢ ن^{٢} ∴ ن^{٢} − ٥ ن + ٦ = ٠

∴ (ن − ٢) (ن − ٣) = ٠ ∴ ن = ٢ ثانية أ، ن = ٣ ثوانٍ

∴ الكرة تكون على بُعد ٦ أمتار من مكان الدفع وفى الجهة التى دفعت ناحيتها مرتين بعد مرور ثانيتين وهى متحركة فى الاتجاه الموجب وبعد مرور ٣ ثوانٍ وهى متحركة فى الاتجاه السالب بعد أن تكون قد وصلت إلى حالة السكون اللحظى عند هـ وغيرت اتجاه حركتها.

٢ إذا كانت : ف = −٦ :

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ حـ ن^{٢} ∴ −٦ = ٥ ن − $\frac{١}{٢}$ × ٢ ن^{٢} ∴ ن^{٢} − ٥ ن − ٦ = ٠

∴ (ن − ٦) (ن + ١) = ٠ ∴ ن = ٦ ثوانٍ

∴ الكرة تكون على بُعد ٦ أمتار من مكان الدفع وفى الجهة الأخرى وهى جهة الإزاحة السالبة بالنسبة لنقطة الدفع بعد مرور ٦ ثوانٍ من لحظة الدفع.

مثال ٩

أطلقت رصاصة أفقيًا على كتلة خشبية بسرعة ١٠٠ متر/ث فغاصت فيها مسافة ٥٠ سم حتى سكنت. أوجد العجلة التى تحركت بها الرصاصة إذا علم أنها عجلة منتظمة ، وإذا تم إطلاقها على كتلة خشبية أخرى مماثلة للأولى سمكها ١٨ سم. فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الكتلة الخشبية ؟

الحـــل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الرصاصة.

• **بالنسبة للكتلة الخشبية الأولى :**

حـ ، $ع_{٠}$ = ١٠٠ متر/ث ، ع = ٠ ، ٥٠ سم

$ع_{٠}$ = ١٠٠ م/ث ، ع = ٠

، ف = $\frac{١}{٢}$ متر

، $\because$ $ع^{٢} = ع_{٠}^{٢} + ٢ حـ ف$ $\quad\therefore$ $٠ = (١٠٠)^{٢} + ٢ حـ \times \frac{١}{٢}$

$\therefore$ حـ (العجلة المنتظمة للرصاصة) = − ١٠٠٠٠ م/ث^{٢} أى فى عكس اتجاه إطلاق الرصاصة

• **بالنسبة للكتلة الخشبية الثانية :**

حـ ، $ع_{٠}$ = ١٠٠ متر/ث ، ع = ؟ ، ١٨ سم

$ع_{٠}$ = ١٠٠ م/ث ، حـ = −١٠٠٠٠ م/ث^{٢}

، ف = ١٨ سم = ٠,١٨ متر.

، $\because$ $ع^{٢} = ع_{٠}^{٢} + ٢ حـ ف$ $\quad\therefore$ $ع^{٢} = ١٠٠٠٠ - ٢ \times ١٠٠٠٠ \times ٠,١٨$

$\therefore$ $ع^{٢} = ١٠٠٠٠ - ٣٦٠٠ = ٦٤٠٠$ $\quad\therefore$ ع = ± ٨٠ م/ث

، $\because$ السرعة التى تخرج بها الرصاصة فى نفس اتجاه إطلاق الرصاصة أى فى الاتجاه الموجب

$\therefore$ ع سرعة خروج الرصاصة من الكتلة الخشبية الثانية = ٨٠ متر/ث

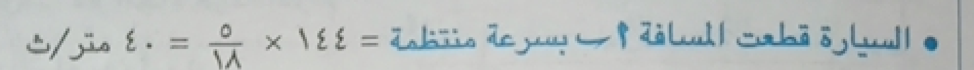
مثال ١٠

تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ١٤٤ كم/س ، مرت بسيارة شرطة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ١٠ ثوان من مرورها ، متحركة بعجلة منتظمة لمسافة ٢٠٠ متر حتى بلغت سرعتها ١٨٠ كم/س ، ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذى استغرقته سيارة الشرطة من بدء حركتها حتى لحاقها بالسيارة.

الحـــل

نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة السيارة وأن السيارة مرت بسيارة الشرطة عند أ وأن سيارة الشرطة لحقتها عند ب

وأن الزمن الذى استغرقته سيارة الشرطة من بدء حركتها حتى لحقت بالسيارة = ن ثانية



• السيارة قطعت المسافة أ ب بسرعة منتظمة $= 144 \times \frac{5}{18} = 40$ متر/ث

فى زمن قدره (ن + ١٠) ثانية

$\therefore$ أ ب = ٤٠ (ن + ١٠) مترًا ... (١)

• سيارة الشرطة تحركت مسافتين أ حـ ، حـ ب :

أولًا : تحركت المسافة أ حـ وقدرها ٢٠٠ متر بعجلة منتظمة حيث $ع_. = ٠$

، $ع = 180 \times \frac{5}{18} = 50$ متر/ث

، $\because ع^2 = ع_.^2 + 2$ حـ ف $\therefore (50)^2 = 0 + 2$ حـ $\times 200$ $\therefore$ حـ $= \frac{25}{4}$ متر/ث^2

، $\because ع = ع_. +$ حـ ن $\therefore 50 = 0 + \frac{25}{4}$ ن

$\therefore$ ن (زمن قطع المسافة أ حـ) = ٨ ثوان

ثانيًا : المسافة حـ ب تحركتها سيارة الشرطة بسرعة منتظمة ٥٠ متر/ث فى زمن قدرة (ن − ٨) ثانية.

$\therefore$ المسافة حـ ب = ٥٠ (ن − ٨) ، $\because$ أ ب = أ حـ + حـ ب

$\therefore$ أ ب = ٢٠٠ + ٥٠ (ن − ٨) ... (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ ٤٠ (ن + ١٠) = ٢٠٠ + ٥٠ (ن − ٨)

$\therefore$ ٤٠ ن + ٤٠٠ = ٢٠٠ + ٥٠ ن − ٤٠٠ $\therefore$ ١٠ ن = ٦٠٠

$\therefore$ ن = ٦٠ ثانية وهو الزمن الذى استغرقته سيارة الشرطة حتى لحقت بالسيارة الأخرى.

مثال ١١

ترام يسير فى خط مستقيم بين محطتين أ ، ب المسافة بينهما ٧٠٠ متر حيث يبدأ من المحطة أ من السكون بعجلة منتظمة ٢ متر/ث^{٢} لمدة ١٠ ثوانٍ ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن ثم يقطع مسافة ٦٠ مترًا الأخيرة من حركته بتقصير منتظم حتى يقف فى المحطة ب أوجد الزمن الذى يستغرقه فى قطع المسافة بين المحطتين.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الترام

- **باعتبار حركة الترام بين أ ، هـ :**

ع. = ٠ ، حـ = ٢ م/ث^{٢} ، ن = ١٠ ثوانٍ

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ حـ ن^{٢} ∴ ف = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١٠٠ ∴ ف = ١٠٠ متر

∴ أهـ = ١٠٠ متر وهى المسافة التى قطعها الترام فى الثوانى العشر الأولى من حركته

، ∵ ع = ع. + حـ ن ∴ ع = ٠ + ١٠ × ٢ ∴ ع = ٢٠ متر/ث

∴ سرعة الترام فى نهاية الثوانى العشر الأولى = ٢٠ متر/ث فى الاتجاه الموجب وهى نفسها السرعة المنتظمة التى يسير بها الترام خلال قطع المسافة هـ ء وهى أيضًا السرعة الابتدائية بالنسبة لحركة الترام بين ء ، ب

- **باعتبار حركة الترام بين ء ، ب :**

ع. = ٢٠ متر/ث ، ع = ٠ ، ف = ٦٠ مترًا

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ حـ ف ∴ ٠ = (٢٠)^{٢} + ٢ حـَ × ٦٠

∴ حـَ = − $\frac{٤٠٠}{١٢٠}$ = − $\frac{١٠}{٣}$ متر/ث^{٢}

، ∵ ع = ع. + حـَ ن ∴ ٠ = ٢٠ − $\frac{١٠}{٣}$ ن ∴ ن = ٢٠ × $\frac{٣}{١٠}$ = ٦ ثوانٍ

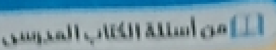
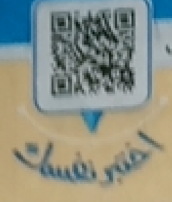
∴ زمن قطع مسافة ٦٠ مترًا الأخيرة = ٦ ثوانٍ

- **باعتبار حركة الترام بين هـ ، ء :**

أهـ + ءب = ١٠٠ + ٦٠ = ١٦٠ مترًا ∴ هـ ء = ٧٠٠ − ١٦٠ = ٥٤٠ مترًا

∵ الحركة منتظمة السرعة ∴ ف = ع × ن ∴ ٥٤٠ = ٢٠ ن

∴ ن = $\frac{٥٤٠}{٢٠}$ = ٢٧ ثانية وهو زمن قطع هـ ء ∴ الزمن كله = ١٠ + ٢٧ + ٦ = ٤٣ ثانية

تمارين 2 على الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا مسائل على المعادلة الأولى

١ تتحرك سيارة فى خط مستقيم مبتدئة من السكون بعجلة منتظمة مقدارها ٢٥ سم/ث^{٢} فى نفس اتجاه حركة السيارة. أوجد :

(١) مقدار سرعة السيارة بعد دقيقتين بالكم/س.

(٢) الزمن بالثوانى الذى تستغرقه السيارة حتى تصبح سرعتها ٦٥ م/ث.

«١٠٨ كم/س ، ٢٦٠ ثانية»

٢ يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث^{٢} وفى اتجاه مضاد لاتجاه سرعته الابتدائية التى مقدارها ٤ م/ث.

أوجد سرعة الجسيم بعد $\frac{١}{٢}$ دقيقة من بدء الحركة والزمن الذى يستغرقه الجسيم حتى يسكن.

«١,٦ م/ث ، ٥٠ ثانية»

٣ بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٢٠ سم/ث وبعجلة منتظمة ٢ سم/ث^{٢} تعمل فى عكس اتجاه متجه السرعة الابتدائية. أوجد :

(١) سرعته فى نهاية ١٠ ثوان من بدء الحركة.

(٢) الزمن الذى يمضى من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ٣,٦ كم/س فى عكس الاتجاه الذى بدأ الحركة فيه.

«صفر ، ٦٠ ثانية»

٤ إذا تغيرت سرعة سيارة (أ) تتحرك فى خط مستقيم من ٢٤ كم/س إلى ٣٦ كم/س خلال ٥ ثوان، وتغيرت سرعة سيارة (ب) تتحرك فى نفس الخط المستقيم من ١٢ كم/س إلى ٣٠ كم/س خلال نفس المدة.

أيهما يتحرك بتسارع أكبر ؟ فسِّر إجابتك.

«السيارة ب»

٥ يتحرك جسيم فى خط مستقيم فتغيرت سرعته من ٥٤ كم/س إلى ٣ م/ث فى زمن قدره نصف دقيقة. أوجد مقدار عجلة الحركة.

هل يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظيًا ؟ فسِّر إجابتك.

«-٠,٤ متر/ث^{٢}»

٦ تحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة قدرها $\frac{١}{٢}$ م/ث^{٢} فبلغت سرعته $\frac{١}{٢}$ ٣١ كم/س فى نفس اتجاه عجلته وذلك بعد مرور ١٢ ثانية من بدء الحركة.

أوجد سرعته الابتدائية.

«٢,٧٥ م/ث»

٧ يتحرك جسم فى خط مستقيم بتقصير منتظم مقداره يساوى ٣ م/ث^{٢} فسكن بعد ١٩ ثانية.
أوجد :
(١) مقدار السرعة الابتدائية.
(٢) مقدار واتجاه السرعة بعد ١٣ ، ٢٥ ثانية.
«٥٧ م/ث ، ١٨ م/ث ، −١٨ م/ث»

٨ جسيم متحرك فى خط مستقيم بلغت سرعته ١٠٠ سم/ث بعد ٥ ثوانٍ من بدء حركته ، وبلغت ٧٢ سم/ث فى نفس الاتجاه بعد ١٢ ثانية من بدء الحركة.
أوجد عجلته وسرعته الابتدائية وكذلك سرعته بعد ٥٠ ثانية من بدء الحركة.
«−٤ سم/ث^{٢} ، ١٢٠ سم/ث ، −٨٠ سم/ث»

ثانيًا مسائل على المعادلة الثانية

١ تحرك جسم فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٧ م/ث وبعجلة منتظمة ٤ م/ث^{٢} فى اتجاه حركته. أوجد سرعته والمسافة التى يقطعها خلال ٦ ثوان.
«٣١ م/ث ، ١١٤ م»

٢ يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة ٤٠ سم/ث^{٢} فى اتجاه سرعته الابتدائية فإذا كانت إزاحة الجسيم ٣٥ مترًا فى نفس اتجاه بداية الحركة بعد ١٠ ثوانٍ. احسب مقدار السرعة الابتدائية وكذلك مقدار سرعته فى نهاية هذه المدة.
«١,٥ م/ث ، ٥,٥ م/ث»

٣ يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٤٠ سم/ث^{٢} وبسرعة ابتدائية ٣٦ كم/س فى نفس اتجاه متجه عجلته.
أوجد بعد كم ثانية يصبح على بُعد ٤٣,٢ متر من نقطة الابتداء.
«٤ ثوان»

٤ يتحرك جسيم فى خط مستقيم فإذا كانت سرعته فى لحظة ما ٥٠ سم/ث ، عجلته ٤ سم/ث^{٢} فى اتجاه مضاد لاتجاه هذه السرعة.
أوجد متى وأين يسكن هذا الجسيم سكونًا لحظيًا.
«١٢,٥ ثانية ، ٣١٢,٥ سم»

٥ يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٥٢ مترًا فى الثوان الأربع الأولى ثم قطع مسافة ٩٢ مترًا فى الثوان الأربع التالية لها.
احسب عجلة الحركة والسرعة الابتدائية والمسافة المقطوعة خلال ١٠ ثوان الأولى من حركته.
«٢,٥ م/ث^{٢} ، ٨ م/ث ، ٢٠٥ م»

٦ تحركت كرة صغيرة بسرعة ١٥٠ سم/ث على مستوى أفقى فى خط مستقيم بتقصير منتظم مقداره ١٥سم/ث^{٢}.
أوجد الزمن الذى يمضى من لحظة تحرك الكرة حتى تصبح على بعد ٧٢٠ سم من نقطة بداية الحركة.
«٨ ، ١٢ ، ٢٤ ثانية»

---

٧ قذفت كرة صغيرة أفقيًا فى عكس اتجاه الرياح بسرعة ابتدائية ٧٢ سم/ث وتحركت فى خط مستقيم بعجلة ٧ سم/ث^{٢} وفى اتجاه مضاد لاتجاه السرعة الابتدائية.
أوجد متى تقف هذه الكرة لحظيًا ثم أوجد مقدار إزاحة الكرة بعد ٨ ، ١٨ ، ٢٤ ثانية من بدء الحركة. ماذا تلاحظ ؟
« $\frac{٢}{٧}$ ١٠ ثانية ، ٣٥٢ سم ، ١٦٢ سم ، -٢٨٨ سم»

---

٨ قذفت كرة أفقيًا فى عكس اتجاه الرياح بسرعة ٤٥ سم/ث فتحركت فى خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة ثابتة = ٦ سم/ث^{٢}. أوجد :

(١) متى تعود الكرة إلى النقطة التى قذفت منها.

(٢) متى تكون الكرة على بُعد ١٦٢ سم من نقطة القذف.
«١٥ ثانية ، ٦ ، ٩ ، ١٨ ثانية»

---

٩ بدأ جسيم حركته بسرعة ٦٠ سم/ث فى خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) وبتقصير منتظم ٧,٥ سم/ث^{٢}. أوجد متى يكون الجسيم على بُعد ١٠٥ سم من النقطة (و) فى نفس الجهة التى بدأ الجسيم حركته ناحيتها ومتى يكون الجسيم على بُعد ٣٠٠ سم من النقطة (و) فى الجهة الأخرى منها.
«٢ ، ١٤ ثانية ، ٢٠ ثانية»

ثالثًا مسائل على المعادلة الثالثة

١ انطلقت سيارة من السكون بتسارع مقداره ٤ م/ث^{٢}.
ما المسافة التى تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها ٢٤ م/ث ؟
«٧٢ متر»

---

٢ تسير سيارة سباق فى الحلبة بسرعة ٤٤م/ث ثم تناقصت سرعتها بمعدل ثابت ، حتى أصبحت ٢٢ م/ث خلال ١١ ثانية.
أوجد المسافة التى قطعتها السيارة خلال هذا الزمن.
«٣٦٣ متر»

---

٣ يتحرك قطار فى خط مستقيم بسرعة ٤٥ كم/س وعندما اقترب من المحطة ضغط السائق على الفرامل فتحرك القطار بتقصير منتظم مقداره $١\frac{١}{٤}$ متر/ث^{٢} حتى وقف فى المحطة.
احسب المسافة التى قطعها القطار من لحظة استخدام الفرامل وحتى وقف.
«٦٢,٥٠ متر»

٤ سيارة تتحرك فى خط مستقيم وعندما كانت سرعتها ٧٢ كم/س استخدمت الفرامل فتحركت حركة تقصيرية منتظمة التغير وأصبحت سرعتها ٥٤ كم/س بعد مسافة قدرها ١٤٠ مترًا.

أوجد عجلة الحركة والمسافة التى تقطعها السيارة من لحظة استخدام الفرامل حتى تسكن.

« $-\frac{5}{8}$ م/ث^2 ، ٣٢٠ مترًا »

---

٥ نقصت سرعة سيارة بانتظام من ١٣٢ كم/س إلى ٢٤ كم/س بعد أن قطعت مسافة ١١٧٠ مترًا.

أوجد الزمن الذى قطعت فيه السيارة هذه المسافة وما المسافة التى تقطعها بعد ذلك حتى تسكن.

« ٥٤ ثانية ، ٤٠ مترًا »

---

٦ أطلقت رصاصة بسرعة ٥٠ م/ث على هدف ثابت فسكنت فيه بعد أن غاصت مسافة ٢٥ سم أوجد السرعة التى تنفذ بها الرصاصة فى نفس الهدف إذا كان سمكه ١٦ سم على فرض ثبوت العجلة فى الحالتين.

« ٣٠ م/ث »

---

٧ قذف جسيم فى عكس اتجاه الرياح بسرعة ٤٠سم/ث ، فتحرك فى خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها ٨سم/ث^2. أوجد سرعة الجسيم عندما يكون على بعد :

(١) ٨٤ سم من نقطة القذف فى اتجاه القذف.

(٢) ٩٦ سم من نقطة القذف وفى الجهة الأخرى بالنسبة لجهة القذف ، وفسر معنى الأجوبة التى تحصل عليها.

« ١٦ سم/ث فى اتجاه القذف ، ١٦ سم/ث فى عكس اتجاه القذف ، ٥٦ سم/ث فى عكس اتجاه القذف »

رابعًا مسائل على السرعة المتوسطة خلال الثانية النونية

١ يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة على مستوى أفقى أملس فقطع ٢٦ مترًا خلال الثانية الرابعة من بدء الحركة ، ٥٦ مترًا خلال الثانية التاسعة.

أوجد سرعته الابتدائية ومقدار عجلته.

« ٥ م/ث ، ٦ م/ث^2 »

---

٢ بدأ جسم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ١٥ سم/ث وعجلة منتظمة ٤ سم/ث^2 فى نفس اتجاه سرعته. احسب :

(١) المسافة التى يكون الجسم قد قطعها فى الثانية السادسة فقط.

(٢) المسافة التى يكون الجسم قد قطعها فى الثانيتين السابعة والثامنة فقط.

« ٣٧ سم ، ٨٦ سم »

٣ تحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما فى اتجاه ثابت وبعجلة منتظمة ، فإذا قطع فى الثانية الثالثة من حركته مسافة ٢٠ مترًا ، ثم قطع فى الثانيتين الخامسة والسادسة معًا مسافة ٦٠ مترًا.
احسب العجلة التى تحرك بها الجسيم وسرعته الابتدائية.
«٤٠ م/ث^{2} ، ١٠ م/ث»

٤ يتحرك جسيم بعجلة منتظمة فى اتجاه ثابت. فإذا قطع ٢٠ مترًا خلال الثانية الثالثة من بدء حركته ، ١٥٠ مترًا فى الثوانى الثامنة والتاسعة والعاشرة.
احسب العجلة التى يتحرك بها الجسيم والسرعة عند بدء حركته.
«٥ م/ث^{2} ، ٧.٥ م/ث»

٥ تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم ابتداء من السكون بعجلة منتظمة فقطعت خلال الثوانى الخامسة والسادسة والسابعة مسافة قدرها ١٣٢ سم
أوجد كلاً من العجلة والمسافة التى تقطعها من بدء الحركة حتى تبلغ سرعتها ٦٦ سم/ث.
«٨ سم/ث^{2} ، $272\frac{1}{4}$ سم»

٦ يتحرك جسيم بعجلة منتظمة فقطع فى الثوانى الأربعة الأولى من حركته مسافة ٢٠٠ متر ثم قطع ٥٠ مترًا فى الثانيتين السابعة والثامنة.
أوجد سرعته الابتدائية والمسافة التى يقطعها منذ بدء حركته حتى يتوقف لحظيًا.
«٦٠ م/ث ، ٣٦٠ م»

٧ بدأ جسم حركته بسرعة ٧ م/ث وبعجلة منتظمة ٢ م/ث^{2} فقطع مسافة ٣٠ مترًا ثم انقطعت العجلة وسار بسرعة منتظمة مسافة ٥٢ مترًا. أوجد :

(١) الزمن الكلى للحركة.
(٢) المسافة المقطوعة فى الثانية الثالثة.

«٧ ثوانٍ ، ١٢ م»

خامسًا مسائل عامة

١ أكمل باستخدام أحد الرموز الآتية : ($ع_.$ ، ع ، حـ ، ف ، ف)

(١) عند بدء الحركة لجسم فإن : .... = صفر
(٢) إذا بدأ الجسم حركته من السكون فإن : .... = صفر
(٣) عند وصول الجسم إلى أقصى بُعد فإن : .... = صفر
(٤) إذا تحرك الجسم بسرعة منتظمة فإن : .... = صفر
(٥) إذا عاد الجسم إلى موضعه الأصلى الذى بدأ الحركة منه فإن : .... = صفر

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① بدأ جسم حركته بسرعة ٢٤ م/ث بتقصير منتظم ٨ م/ث^{٢} فإن :

الجسم يتوقف لحظيًا بعد زمن = ... ثانية.

(أ) ٣ (ب) ١٦ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣٠

② بدأ جسم حركته بسرعة ١٢٦ كم/ساعة وتوقف بعد أن قطع مسافة ١٢٢,٥ متر فإن :

عجلة الحركة للجسم = ... م/ث^{٢}.

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٣٢٤}{٥}$ (د) $\frac{-٣٢٤}{٥}$

③ المسافة التى يقطعها جسيم يتحرك فى اتجاه ثابت من السكون بعجلة مقدارها ٥ سم/ث^{٢} فى زمن قدره ٤ ثوان = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ٨٠

④ يتحرك جسيم فى اتجاه ثابت بعجلة منتظمة ٨ سم/ث^{٢} فى نفس اتجاه سرعته الابتدائية فإذا قطع الجسيم مسافة ٦٠٠ سم فى الثوانى العشر الأولى من حركته فإن سرعته الابتدائية = ... سم/ث.

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

⑤ يتحرك جسيم فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٥٠ سم/ث وبعجلة منتظمة ٥ سم/ث^{٢} فى اتجاه سرعته فإن المسافة التى يكون قد قطعها عندما تبلغ سرعته ١ م/ث هى .... متر.

(أ) ٧,٥ (ب) ٧٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٥٠

⑥ السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ع. وعجلة منتظمة حـ خلال الثانية السادسة من حركته = ...

(أ) ع. + ٥ حـ
(ب) ع. + ٦ حـ
(جـ) ع. + $\frac{١}{٢}$ ٥ حـ
(د) ع. + ٣ حـ

⑦ السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ع. وعجلة منتظمة حـ خلال الثوانى السابعة والثامنة والتاسعة = ...

(أ) ع. + $\frac{١}{٢}$ ٧ حـ
(ب) ع. + ٨ حـ
(جـ) ع. + $\frac{١}{٢}$ ٨ حـ
(د) ع. + ٩ حـ

⑧ يتحرك جسيم من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٢٤ مترًا فى الثوانى الأربع الأولى من حركته ، فإن مقدار عجلته = ... م/ث^٢

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) $\frac{٣}{٢}$

⑨ ١٨٠ مترًا/ساعة / ث = ... سم/ث^٢

(أ) $\frac{١}{٢٠}$ (ب) ٥ (جـ) ٣٠ (د) ٣٠٠

⑩ بدأ جسيم حركته من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٣ سم/ث^٢ فقطع مسافة ٢٤ سم فإن سرعته فى نهاية تلك المسافة = ... سم/ث.

(أ) ١٤٤ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٧٢

⑪ إذا بدأ جسيم حركته بسرعة ٣٠ سم/ث وبعجلة منتظمة ٥ سم/ث^٢ فى اتجاه سرعته الابتدائية ، فإن المسافة المقطوعة بعد ١٠ ثوان من بدء الحركة = ... سم

(أ) ٥٥٠ (ب) ٣٠٠ (جـ) ٧٥٠ (د) ١٥٠٠

⑫ إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم من السكون بعجلة منتظمة (حـ) فإن الإزاحة الحادثة (ف) ∝ ....

(أ) ن (ب) ع (جـ) ن^٢ (د) حـ

⑬ يتحرك جسم بسرعة ابتدائية ($ع_0$) سم/ث وبعجلة منتظمة (حـ) سم/ث^٢ وسرعة نهائية (ع) سم/ث وكان ع − $ع_0$ = ١٠ سم/ث ، $\sqrt{حـ ف}$ = ٢٠ سم/ث

فإن : $\frac{ع}{ع_0}$ = ...

(أ) $\frac{١٧}{٩}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٩}{٧}$ (د) $\frac{٩}{٥}$

⑭ طائرة تتزايد سرعتها بمعدل ١٥ م/ث^٢ فإن الزمن اللازم لزيادة السرعة من ١٠٠ م/ث إلى ١٦٠ م/ث هو .... ثانية.

(أ) ١٧ (ب) ٠,٠٥ (جـ) ٤ (د) ١,٢٥

⑮ قذفت كرة أفقيًا فى عكس اتجاه الرياح بسرعة ابتدائية $ع_0$ = ١٥ سم/ث فتحركت بتقصير منتظم ٥ سم/ث^٢ فإن الزمن الذى تستغرقه الكرة حتى تعود إلى نقطة البداية = ... ثانية.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٦) في الشكل المقابل :

العجلة (ح) = ... م/ث^{٢}

(أ) ٢

(ب) −٢

(جـ) −٣

(د) −١

(١٧) 📖 تتساقط قطرات الزيت من إحدى السيارات المتحركة من اليسار إلى اليمين كما بالشكل المقابل بملاحظة قطرات الزيت فإن السيارة تتحرك ....

(أ) بسرعة منتظمة. (ب) بعجلة.

(جـ) بتقصير (د) بتقصير ثم سرعة منتظمة.

---

٣ بدأ جسم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ٥٤ كم/س وتوقف بعد ٥ ثوان. أوجد :

(١) عجلة حركة الجسم. (٢) المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة.

« −٣ م/ث^{٢} ، ٣٧,٥ مترًا »

---

٤ 📖 يتحرك راكب دراجة بعجلة منتظمة حتى صارت سرعته ٧,٥ م/ث خلال ٤,٥ ثانية فإذا كانت إزاحه الدراجة خلال فترة التسارع تساوى ١٩ مترًا.

أوجد السرعة الابتدائية للدراجة.

« $\frac{١٧}{١٨}$ م/ث »

---

٥ هبط من السكون راكب دراجة من قمة تل منحدرًا بعجلة ثابتة مقدارها ٢ م/ث^{٢} ، وعندما وصل إلى قاعدة التل بلغت سرعته ١٨ م/ث ثم سار بهذه السرعة لمدة دقيقة واحدة.

أوجد المسافة الكلية التي قطعها راكب الدراجة.

« ١١٦١ مترًا »

---

٦ 📖 بدأ جسم حركته من السكون في خط مستقيم أفقي بعجلة منتظمة مقدارها ٤ سم/ث^{٢} لمدة ٣٠ ثانية ، ثم تحرك بالسرعة التي اكتسبها لمدة ٤٠ ثانية أخرى في نفس الاتجاه.

أوجد سرعته المتوسطة.

« $٩٤\frac{٢}{٧}$ سم/ث »

٧ بدأ جسم حركته من السكون بعجلة منتظمة ٢٠ سم/ث^{٢} وعندما أصبحت سرعته ٨ م/ث تحرك بتقصير منتظم ٢٥ سم/ث^{٢} حتى سكن.
أوجد الزمن الكلى والمسافة المقطوعة.
«٧٢ ثانية ، ٢٨٨ مترًا»

٨ يتدرب كريم على ركوب الدراجة ، يدفعه والده فيكتسب تسارعًا ثابتًا مقداره $\frac{١}{٢}$ م/ث^{٢} لمدة ٦ ثوان ، وبعد ذلك يقود كريم الدراجة بمفرده بالسرعة التى اكتسبها لمدة ٦ ثوان أخرى قبل أن يسقط أرضًا.
أوجد مقدار المسافة التى يقطعها كريم.
«٢٧ متر»

٩ قائد سيارة يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ٢٤ م/ث ، شاهد فجأة طفلًا يمر فى الشارع ، فإذا كان الزمن اللازم لاستجابة الفرامل هو $\frac{١}{٢}$ ثانية ثم تحركت السيارة بتقصير منتظم مقدارة ٩,٦ م/ث^{٢} حتى وقفت.
أوجد المسافة الكلية التى تحركتها السيارة قبل أن تقف مباشرة.
«٤٢ متر»

١٠ بدأ جسم حركته من سكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٠,٣٦ كم/س/ث. وعندما أصبح سرعته ٨ م/ث تحرك بتقصير منتظم حتى سكن بعد ١١٢ ثانية من بداية الحركة.
احسب التقصير المنتظم والمسافة الكلية.
«$-\frac{١}{٤}$ متر/ث^{٢} ، ٤٤٨ متر»

١١ تحرك جسم من سكون فقطع ١٥٠ م حتى أصبحت سرعته ٥٤ كم/س فإذا انقطعت العجلة عندئذ وسار بالسرعة التى اكتسبها مسافة ٣٠٠ متر ، ثم تحرك بعد ذلك بتقصير منتظم قدرة $\frac{٣}{٢}$ م/ث^{٢} حتى سكن.
احسب السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.
«١٠,٥ متر/ث»

١٢ تحركت سيارة من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٣ متر/ث^{٢} وفى اللحظة التى بلغت فيها سرعتها ١١٨,٨ كم/س شاهد سائقها طفلاً يعبر الشارع فضغط على الفرامل فوقفت بعد أن قطعت مسافة ٢٤,٧٥ مترًا.
أوجد المسافة الكلية التى تحركتها السيارة والزمن الكلى لحركتها.
«٢٠٦,٢٥ مترًا ، ١٢,٥ ثانية»

١٣ تحرك جسيم من السكون فى اتجاه ثابت بعجلة منتظمة وعند نهاية ٤٠٠ متر كانت سرعته ١٠ متر/ث فسار بهذه السرعة مسافة ٨٠٠ متر ثم تحرك حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مسافة ٢٠٠ متر حتى سكن لحظيًا.
أوجد الزمن الذى استغرقه فى قطع المسافة كلها وسرعته المتوسطة خلال قطعها.
«٢٠٠ ثانية ، ٧ متر/ث»

١٤ أطلقت رصاصة بسرعة ٢٠٠ م/ث فى اتجاه عمودى على حائط رأسى سمكه ١٤ سم، فخرجت منه بسرعة ١٥٠ م/ث. أوجد مقدار العجلة ، وإذا أطلقت الرصاصة بنفس السرعة على حائط رأسى آخر له نفس المقاومة ، فأوجد المسافة التى تغوصها حتى تسكن، علمًا بأن العجلة التى تتحرك بها الرصاصة واحدة فى الحالتين.

٦٢٥٠٠٠ م/ث^٢ ، ٣٢ سم

---

١٥ تحرك جسم فى خط مستقيم فقطع ٥٢ سم فى ٤ ثوان بعجلة منتظمة ، ثم أوقفت العجلة لمدة ٣ ثوان قطع خلالها الجسم مسافة ٤٨ سم ، ثم تحرك الجسم بعد ذلك بتقصير منتظم يساوى ضعف عجلته الأولى حتى وقف تمامًا.

أوجد السرعة الابتدائية للجسم ثم احسب المسافة الكلية التى قطعها الجسم.

١٠ سم/ث ، $١٤٢\frac{٢}{٣}$ سم

---

١٦ تحرك جسيم فى خط مستقيم من السكون فقطع مسافة ١٢٥ مترًا بعجلة منتظمة ١٠ متر/ث^٢ ثم انقطعت العجلة فسار بالسرعة التى اكتسبها مسافة أخرى قدرها ٤٠٠ متر ، ثم تحرك حركة تقصيرية بعجلة منتظمة ٥ متر/ث^٢ حتى سكن.

أوجد الزمن الذى قطع فيه المسافة كلها.

٢٣ ثانية

---

١٧ يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٣ متر/ث^٢ فى اتجاه حركته وبعد أن قطع مسافة ١٥٠ مترًا انقطعت العجلة وسار بالسرعة التى اكتسبها فى نهاية هذه المسافة لمدة ٢٠ ثانية ، فإذا كانت المسافة الكلية التى قطعها الجسيم هى ١١٥٠ مترًا.

فأوجد سرعته التى بدأ بها حركته.

٤٠ متر/ث

---

١٨ بدأت سيارة الحركة من سكون بعجلة منتظمة ١٨٠ كم/س لكل دقيقة وبعد ٢٤ ثانية أوقفت العجلة فتناقصت السرعة بانتظام بفعل الاحتكاك ومقاومة الهواء بمعدل ٤٥٠ متر/س/ث وبعد ٣٢ ثانية استخدمت فرامل السيارة فأوقفتها فى مدة ٨ ثوانٍ.

أوجد المسافة الكلية التى قطعتها السيارة.

٨٨٠ مترًا

---

١٩ يتحرك جسم فى خط مستقيم بسرعة منتظمة ٢٥ سم/ث ، وبعد ثانيتين من مروره بموضع معين تحرك جسم آخر من نفس الموضع وفى نفس الاتجاه بسرعة ابتدائية ١٥ سم/ث وبعجلة منتظمة ٨ سم/ث^٢.

متى يتلاقى الجسمان ؟

٥ ثوانٍ من بدء تحرك الجسم الثانى

٢٠ تتحرك كرة صغيرة فى خط مستقيم بسرعة منتظمة ١٢ سم/ث وبعد ٤ ثوان من مرورها بنقطة معينة تحركت كرة أخرى من هذه النقطة فى نفس اتجاه حركة الكرة الأولى وبسرعة ابتدائية ٤ سم/ث وبعجلة منتظمة ٢ سم/ث^{2}.

أوجد متى وأين تتصادم الكرتان وكم كانت سرعة الكرة الثانية قبل الاصطدام مباشرة.

«١٢ ثانية من بدء تحرك الكرة الثانية ، ١٩٢ سم ، ٢٨ سم/ث»

٢١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى التمثيل البيانى لمنحنى السرعة والزمن فإن الميل السالب يشير إلى ....

(أ) الجسم يتحرك للخلف. (ب) الجسم يتحرك بتسارع.

(جـ) الجسم يتحرك بتقصير. (د) الجسم يتحرك بسرعة منتظمة.

② جسم يتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بعجلة ٢ م/ث^{2} فإن ذلك يعنى أن ....

(أ) الجسم يتحرك ٢ متر كل ثانية. (ب) الجسم يتحرك بسرعة ٢ م/ث

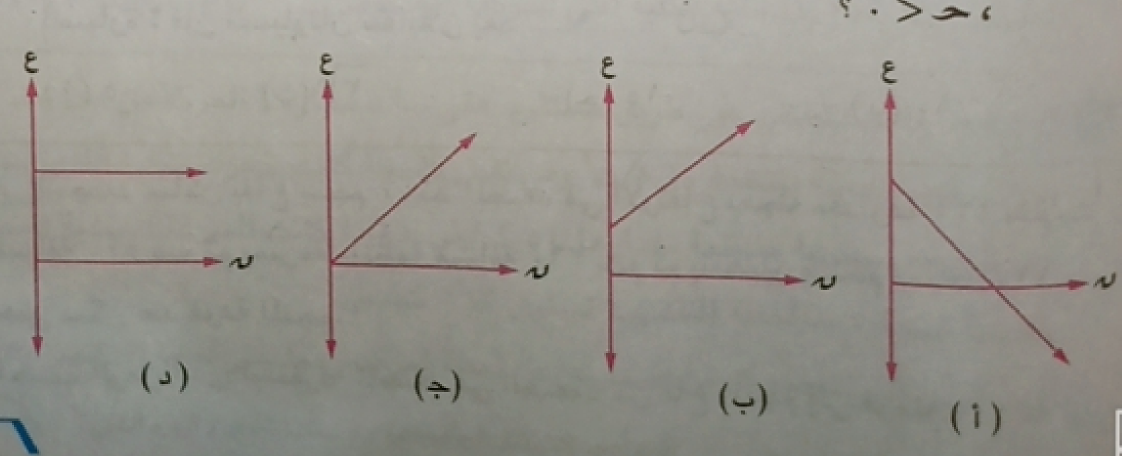
(جـ) سرعة الجسم تتناقص بمقدار ٢ م/ث كل ثانية.

(د) سرعة الجسم تتزايد بمقدار ٢ م/ث كل ثانية.

③ طُلب من أحد المهندسين تصميم ممر إقلاع لأحد المطارات فإذا كان أقل تسارع للطائرات التى ستستخدم هذا الممر هو ٣ م/ث^{2} وسرعة إقلاع الطائرات هو ٦٥ م/ث فإن أقصر طول لممر الإقلاع = ... متر.

(أ) $\frac{١}{٦}$ ٧٠٤ (ب) $\frac{٥}{٦}$ ٨١٠ (جـ) $\frac{١}{٤}$ ٤٠٦ (د) $\frac{١}{٦}$ ٧٥٤

④ أى من منحنيات (السرعة . الزمن) الآتية يمثل حركة جسم بحيث يكون ع. > ٠ ، جـ > ٠ ؟



⑤ جسم يتحرك فى خط مستقيم بعجلة ثابتة فتحرك ١٠ متر فى الثانية الأولى و١٥ متر فى الثانية الثانية فإن المسافة المقطوعة خلال الثانية الثالثة = ... متر.

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

⑥ سيارة تبدأ حركتها من السكون عند أ وتتحرك فى خط مستقيم بعجلة ثابتة لمدة ٢٠ ثانية حتى تصل إلى النقطة (ب) فإذا كانت سرعة السيارة عند النقطة ب هى ٣٠ م/ث فإن سرعة السيارة عند النقطة حـ ≃ .... م/ث حيث أن حـ تقع بين أ ، ب حيث أ حـ = ٤٠ متر.

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٣ (د) ١٥

⑦ متسابق يتحرك بعجلة منتظمة يمر بثلاث نقط أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة حيث أ ب = ب حـ = ٢٠ متر فإذا كانت سرعة المتسابق عند أ تساوى ٨ م/ث وسرعته عند ب تساوى ١٢ م/ث فإن سرعته عند حـ هى .... م/ث

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) $١٤\sqrt{٢}$ (د) $٤\sqrt{١٤}$

⑧ جسمان يتحركان على نفس الخط الأفقى كل منهما فى اتجاه الآخر إذا تحرك الجسم الأول من نقطة أ بسرعة ابتدائية ٨ م/ث وعجلة $\frac{٣}{٤}$ م/ث^{٢} وتحرك الجسم الثانى من نقطة ب بسرعة ابتدائية ٤ م/ث وعجلة $\frac{٥}{٤}$ م/ث^{٢} إذا كان أ ب = ٦٤ متر فإن الجسمان يتصادمان بعد .... ثانية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑨ تتحرك سيارة أ بسرعة منتظمة مقدارها ١٥ م/ث وفى نفس اللحظة ومن نفس النقطة تحركت سيارة أخرى ب من السكون بعجلة مقدارها ٣ م/ث^{٢} فى نفس اتجاه حركة السيارة أ فإن السيارتان تتقابلان بعد .... ثانية.

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥ (د) ١٠

٢٢ مصعد ساكن بقاع منجم ، أخذ المصعد فى الارتفاع بعجلة مقدارها ١٢٠ سم/ث^{٢} مسافة ٥٤٠ سم ثم بسرعة منتظمة مسافة ٣٦٠ سم ثم بتقصير منتظم مسافة ٧٢٠ سم حتى سكن عند فوهة المنجم.
احسب الزمن الذى استغرقه المصعد فى الصعود من قاع المنجم إلى فوهته. «٨ ثوانٍ»

٢٣ قطار يسير فى خط مستقيم بين محطتين المسافة بينهما ٥٢٨٠ مترًا فيبدأ من السكون من إحدى المحطتين ويسير بعجلة منتظمة ٢,٢ متر/ث^{٢} إلى أن تبلغ سرعته ٤٤ متر/ث فيسير بهذه السرعة فترة من الزمن ثم يسير بعجلة منتظمة فى عكس اتجاه الحركة قدرها ١,١ متر/ث^{٢} إلى أن يقف فى المحطة الأخرى.
أوجد الزمن الذى يستغرقه فى السير بين المحطتين. «٢,٥ دقيقة»

---

٢٤ يتحرك ترام بين محطتين المسافة بينهما ٧٠٠ متر فيبدأ من السكون من المحطة الأولى بعجلة $١\frac{١}{٢}$ متر/ث^{٢} لمدة عشر ثوان ، ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن ، ثم يقطع أخيرًا مسافة ٦٠ مترًا تكون حركته خلالها تقصيرية حتى يتوقف فى المحطة الثانية.
أوجد الزمن الذى استغرقه فى قطع المسافة بين المحطتين. «$٥٥\frac{٢}{٣}$ ث»

---

٢٥ يسير قطار فى خط مستقيم بين محطتين مبتدئًا من السكون بعجلة منتظمة (حـ) م/ث^{٢} لمدة دقيقة واحدة وبعدها يسير بالسرعة التى اكتسبها بانتظام لمدة دقيقتين ثم يسير بعد ذلك بعجلة منتظمة (٢ حـ) م/ث^{٢} فى عكس اتجاه الحركة حتى يسكن. أوجد النسبة بين المسافات الثلاثة التى يتحركها. وإذا كانت المسافة بين المحطتين ٩,٩ كم.
فأوجد مقدار حـ والسرعة المنتظمة التى تحرك بها. «٢ : ٨ : ١ ، ١ متر/ث^{٢} ، ٦٠ متر/ث»

---

٢٦ تحرك جسيم فى خط مستقيم حركة متسارعة بعجلة منتظمة مقدارها (حـ) سم/ث^{٢} فقطع مسافة ٤٠٠ سم فى ١٠ ثوان ثم زاد مقدار العجلة فأصبح (٢ حـ) سم/ث^{٢} فقطع الجسيم مسافة أخرى قدرها ٧٠٠ سم فى ١٠ ثوان ، ثم تحرك الجسيم حركة تقصيرية بعجلة مقدارها (٣ حـ) سم/ث^{٢} حتى سكن.
احسب قيمة (حـ) والمسافة الكلية التى تحركها الجسيم. «٢ سم/ث^{٢} ، ١٧٧٥ سم»

---

٢٧ سـ ، ص نقطتان على طريق مستقيم أفقى بدأت سيارة أ الحركة من سـ نحو ص من السكون وبعجلة منتظمة ١٠ م/ث^{٢} وفى نفس اللحظة كانت تتحرك سيارة أخرى ب من ص نحو سـ بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم/س ، فإذا كانت السرعة النسبية للسيارة أ بالنسبة للسيارة ب لحظة التقائهما تساوى ١٦٢ كم/س.
أوجد الزمن الذى تأخذه كل من السيارتين من لحظة تحركهما معًا حتى لحظة التقائهما. «٣٠ ثانية»

٢٨ كرة صغيرة تم دفعها فى عكس اتجاه الرياح بسرعة أفقية مقدارها ٩ م/ث لتتحرك فى خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها ١.٨ م/ث^{2} . أوجد :

① إزاحة الكرة عندما تسكن لحظيًا.

② المسافة التى تقطعها الكرة من بدء الحركة حتى تعود للنقطة التى دُفعت منها.

③ إزاحة الكرة بعد زمن قدره ٨ ثوانٍ من بدء الحركة والمسافة التى تكون الكرة قد قطعتها عندئذ.

④ سرعة الكرة عندما تكون على بُعد ٤٠ مترًا فى الجهة المضادة للجهة التى بدأت فيها الحركة.

» ٢٢.٥ مترًا ، ٤٥ مترًا ، ١٤.٤ مترًا ، ٣٠.٦ مترًا ، ١٥ م/ث فى الاتجاه المضاد

---

٢٩ الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة – الزمن) لجسم بدأ التحرك بسرعة ابتدائية مقدارها ١٠ م/ث وحتى سكن بعد زمن قدره ١١٠ ثانية.

أوجد :

① عجلة التسارع.

② مقدار التقصير المنتظم للجسم حتى يسكن.

③ المسافة الكلية التى تحركها الجسم.

السرعة (م/ث)

الزمن بالثانية

١٠ ٢٠ ٣٠ ٤٠ ٥٠ ٦٠ ٧٠ ٨٠ ٩٠ ١٠٠ ١١٠

» ٢م/ث^{2} ، ٣.٥ م/ث^{2} ، ٦١٠٠ متر

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى مما يأتى يكون مستحيل الحدوث لجسم يتحرك فى خط مستقيم ؟

(أ) له سرعة فى اتجاه الشرق وعجلة فى اتجاه الغرب.

(ب) له سرعة فى اتجاه الشرق وعجلة فى اتجاه الشرق.

(جـ) له عجلة ثابتة غير صفرية وسرعة متغيرة.

(د) له سرعة ثابتة غير صفرية وعجلة متغيرة.

② يتحرك جسم من السكون بعجلة منتظمة لمدة ٢٠ ثانية فإذا قطع مسافة (ف$_{1}$) فى العشر ثوانى الأولى وقطع مسافة (ف$_{2}$) فى العشر ثوانى التالية فإن ....

(أ) ف$_{2}$ = ف$_{1}$ (ب) ف$_{2}$ = ٢ ف$_{1}$ (جـ) ف$_{2}$ = ٣ ف$_{1}$ (د) ف$_{2}$ = ٤ ف$_{1}$

③ بدأ قطار حركته من السكون من إحدى المحطات بعجلة ١ م/ث^{٢} وفى نفس اللحظة يتحرك رجل بسرعة منتظمة ١٠ م/ث خلف القطار وعلى بُعد ٥٠ متر من آخر باب فى القطار فى نفس اتجاه حركة القطار فإن الزمن اللازم للرجل حتى يلحق بالقطار = ... ثانية.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

④ قطار متحرك بعجلة منتظمة فإذا عبرت مقدمة القطار نقطة ثابتة بسرعة ($ع_١$) وعبرت مؤخرة القطار نفس النقطة الثابتة بسرعة ($ع_٢$) فإن نقطة منتصف القطار تعبر نفس النقطة الثابتة بسرعة ....

(أ) $\frac{ع_١ + ع_٢}{٢}$ (ب) $\frac{ع_١^٢ + ع_٢^٢}{٢}$ (جـ) $\sqrt{ع_١ + ع_٢}$ (د) $\sqrt{\frac{ع_١^٢ + ع_٢^٢}{٢}}$

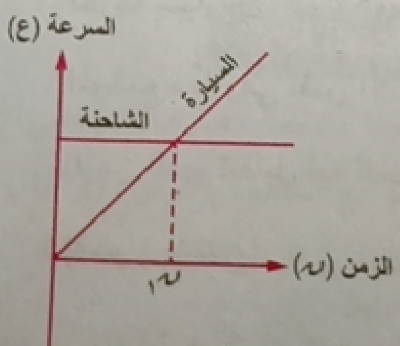
⑤ بدأ جسم حركته بسرعة ابتدائية ٧ سم/ث فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٤ سم/ث^{٢} فقطع مسافة ٣٠ سم ثم انقطعت العجلة وسار بسرعة منتظمة مسافة ٣٤ سم فإن المسافة المقطوعة فى الثانية الثالثة فقط هى .... سم.

(أ) ١٦,٥ (ب) ١٧ (جـ) ١٧,٥ (د) ١٨

⑥ إذا فقد جسم نصف سرعته فى غوص مسافة ٣ سم فى حاجز خشبى سمكه ١٠ سم فإن المسافة التى يقطعها الجسم بعد ذلك حتى يسكن = ... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑦ إذا كانت حركة شاحنة وسيارة يبدأن من نفس المكان وفى خط مستقيم وكان الشكل المقابل يمثل منحنى «السرعة - الزمن» فإن أى مما يأتى صحيح بالنسبة للمسافة المقطوعة حتى اللحظة ($ن_١$) ؟



(أ) لهما نفس المسافة المقطوعة.

(ب) الشاحنة لا تتحرك.

(جـ) السيارة تتحرك مسافة أكثر من الشاحنة.

(د) الشاحنة تتحرك مسافة أكثر من السيارة.

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى «الموضع - الزمن»

لجسمين أ ، ب أى مما يأتى يكون صحيح ؟

(أ) كل من أ ، ب يتحرك بسرعة منتظمة متساوية.

(ب) أ يتحرك بتسارع بينما ب يتحرك بتباطؤ.

(جـ) كل من أ ، ب يتحرك بسرعة منتظمة وسرعة أ أكبر من سرعة ب

(د) كل من أ ، ب يتحرك بسرعة منتظمة وسرعة ب أكبر من سرعة أ

⑨ يتحرك الجسمان أ ، ب فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بحيث كان الجسم أ خلف الجسم ب بمسافة ٤٠ متر فإذا تحرك الجسم (أ) بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث وبعجلة ٤ م/ث^{٢} بينما بدء الجسم (ب) التحرك بسرعة ابتدائية ٤ م/ث وبعجلة ١٢ م/ث^{٢}

فإن أقل مسافة بين الجسمين = ... متر.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٦ (د) ٤٠

---

٣١ تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ٥٤ كم/س ، مرت على سيارة شرطة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ٣٠ ثانية من مرورها متحركة بعجلة منتظمة مسافة ٢٠٠ متر ، حتى بلغت سرعتها ٧٢ كم/س ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذى استغرقته عملية المطاردة من لحظة تحرك سيارة الشرطة والمسافة التى قطعتها سيارة الشرطة.

«١٣٠ ثانية ، ٢٤٠٠ متر»

---

٣٢ الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لحركة سيارتين س ، ص بدأتا الحركة من نفس الموضع معًا وفى نفس الاتجاه أوجد :

الزمن الذى تتقابل فيه السيارتان.

(فسر إجابتك).

«٤٠ ثانية»



الدرس 3

الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية (السقوط الحر)

كان المعتقد قديمًا أن الأجسام الثقيلة تصل إلى سطح الأرض فى حالة سقوطها من نقطة ترتفع عن سطح الأرض فى زمن أقل من الذى تستغرقه الأجسام الخفيفة إذا سقطت من نفس الارتفاع ، إلى أن أثبت أحد العلماء أن جميع الأجسام ثقيلها وخفيفها تسقط نحو الأرض بنفس العجلة المنتظمة وذلك بالتجربة العملية بأن وضع جنيهًا من الذهب مع ريشة صغيرة بداخل أنبوبة أسطوانية من الزجاج مفرغة من الهواء ثم قلب الأنبوبة فوصل الجنيه والريشة إلى قاع الأنبوبة فى نفس اللحظة وهذا يؤكد أن جميع الأجسام بصرف النظر عن وزنها تتحرك عند سقوطها نحو الأرض سقوطًا حرًا بنفس العجلة المنتظمة.

وقد أمكن حساب عجلة الأجسام الساقطة ولوحظ أنها ثابتة المعيار عند نفس المكان ويختلف معيارها قليلاً باختلاف خط العرض فيقل عند خط الاستواء ويزداد قليلًا كلما اتجهنا نحو أحد القطبين وكذلك ينقص معيارها كلما ارتفعنا عن سطح الأرض.

وقد سميت هذه العجلة المنتظمة بعجلة التثاقل أو عجلة الجاذبية الأرضية أو عجلة السقوط الحر وهى تعمل دائمًا نحو مركز الأرض ويرمز لها بالرمز « $\overleftarrow{ء}$ »

وسوف نعتبر معيار $\overleftarrow{ء}$ أى ء = ٩٨٠ سم/ث^{٢} أو ٩,٨ متر/ث^{٢}. ما لم يذكر خلاف ذلك.

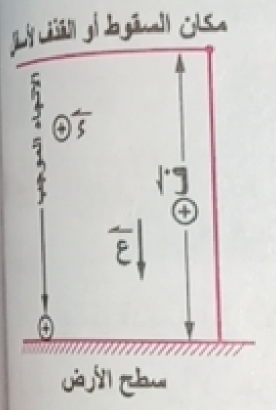
قوانين الحركة الرأسية للأجسام

لما كانت الأجسام المتحركة رأسيًا حركة حرة تكون حركتها بعجلة منتظمة معيارها (ء) فهى إذن تخضع لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (ء) الدال على عجلة الجاذبية الأرضية بدلاً من الرمز (حـ) وبذلك تأخذ القوانين السابقة الصور الآتية :

$$ع = ع_{\cdot} + ء\,ن \quad ، \quad ف = ع_{\cdot}\,ن + \frac{١}{٢}\,ء\,ن^{٢} \quad ، \quad ع^{٢} = ع_{\cdot}^{٢} + ٢\,ء\,ف$$

مع ملاحظة أن ع ، ع. ، ء ، ف هى القياسات الجبرية للمتجهات $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ع.}$ ، $\overleftarrow{ء}$ ، $\overleftarrow{ف}$ مما يتطلب مراعاة إشارة كل منها عند استخدام العلاقات السابقة كما يلى :

أولًا إذا كان الجسيم ساقطًا أو مقذوفًا إلى أسفل



نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل فتكون كل من ع. ، ع ، ء ، ف موجبة وعلى ذلك فإن :

1. كلاً من ع ، ف تزداد بازدياد الزمن ن مقيسًا من لحظة السقوط أو القذف إلى أسفل كما أن ع تزداد كلما زادت ف المقيسة من مكان السقوط أو القذف إلى أسفل.
2. الإزاحة ف فى أى فترة زمنية = المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة.
3. إذا سقط جسيم (أى يبدأ حركته من السكون) فإن : ع. = ٠

مثال ١

سقط جسيم من ارتفاع ٤٤,١ مترًا نحو سطح الأرض. فما هى سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من لحظة سقوطه ؟ ومتى يصل إلى سطح الأرض ؟ وما هى سرعته عندئذٍ ؟

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل

∴ ع. = ٠ ، ء = ٩,٨ م/ث^{٢} ، ف = ٤٤,١ مترًا

∵ ع = ع. + ء ن ∴ ع = ٠ + ٩,٨ × ١

∴ ع (سرعة الجسيم بعد ١ ثانية) = ٩,٨ متر/ث

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢} ∴ ٤٤,١ = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ ن^{٢}

∴ ن^{٢} = $\frac{٤٤,١}{٤,٩}$ = ٩ ∴ ن = ٣ ثوانٍ وهو زمن الوصول لسطح الأرض

∵ ع = ع. + ء ن ∴ ع = ٠ + ٩,٨ × ٣ = ٢٩,٤ متر/ث

∴ ع (سرعة الجسيم عند وصوله للأرض) = ٢٩,٤ متر/ث

مثال ٢

من قمة برج ارتفاعه ١١٢ مترًا قذف جسيم رأسيًا إلى أسفل بسرعة ٨,٤ متر/ث. احسب :

١ المسافة التى يقطعها الجسيم فى الثانية الثالثة من حركته.

٢ زمن وصول الجسيم إلى سطح الأرض.

٣ السرعة التى يصل بها الجسيم لسطح الأرض.

ع. = ٨,٤م/ث
الاتجاه الموجب
١١٢ مترًا
سطح الأرض

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل

∴ ع. = ٨,٤ متر/ث ، ء = ٩,٨ متر/ث^2 ، ف = ١١٢ مترًا

١ ∵ السرعة المتوسطة للجسيم خلال الثانية الثالثة

= سرعة الجسيم بعد ٢,٥ ثانية من بدء الحركة

، ع = ع. + ء ن ∴ ع = ٨,٤ + ٩,٨ × $\frac{٥}{٢}$ = ٣٢,٩ متر/ث

∴ ف (وهى المسافة المقطوعة فى الثانية الثالثة)

= ع$_م$ × ن = ٣٢,٩ × ١ = ٣٢,٩ مترًا

٢ ∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^2

∴ ١١٢ = ٨,٤ ن + $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ ن^2 ∴ ٤٩ ن^2 + ٨٤ ن − ١١٢٠ = ٠

∴ ٧ ن^2 + ١٢ ن − ١٦٠ = ٠ ∴ (ن − ٤) (٧ ن + ٤٠) = ٠

∴ ن = ٤ ثوانٍ وهى زمن وصول الجسيم لسطح الأرض.

٣ ∵ ع = ع. + ء ن

∴ ع = ٨,٤ + ٩,٨ × ٤ = ٤٧,٦ متر/ث

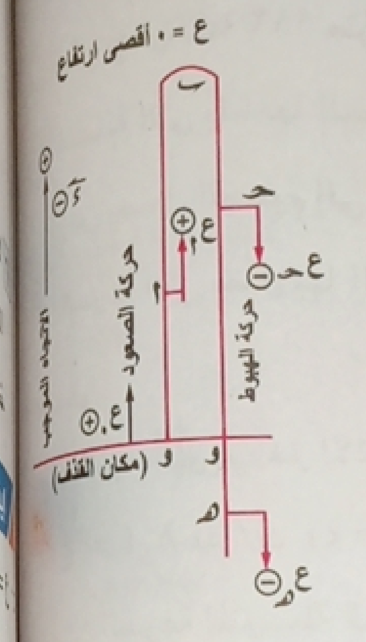
∴ سرعة وصول الجسيم لسطح الأرض = ٤٧,٦ متر/ث

أ، ∵ ع^2 = ع.^{2} + ٢ ء ف

∴ ع^2 = (٨,٤)^2 + ٢ × ٩,٨ × ١١٢ = ٢٢٦٥,٧٦

∴ ع = $\sqrt{٢٢٦٥,٧٦}$ = ٤٧,٦ متر/ث

ثانيًا إذا كان الجسيم مقذوفًا إلى أعلى



١ فى هذه الحالة نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أعلى فتكون : ع. موجبة ، ء سالبة

٢ إذا قذف جسيم من الموضع (و) رأسيًا إلى أعلى فإن سرعته تتناقص حتى تصبح صفرًا عند الموضع (ب) ويقال عندئذٍ أن الجسيم قد وصل إلى أقصى ارتفاع له وهو (وب) ، بعد ذلك يعود الجسيم هابطًا من السكون وتصبح عجلته موجبة فتعمل على زيادة سرعته حتى يعود مرة أخرى إلى (و). وإذا لم يتوقف عند (و) فإنه يستمر فى الهبوط رأسيًا إلى أسفل كما هو مبين بالشكل الموضح.

٣ • سرعة الجسيم أثناء الصعود تكون موجبة وأثناء الهبوط تكون سالبة

فمثلاً : عأ موجبة بينما عحـ ، عهـ سالبتين.

أما السرعة عند أقصى ارتفاع فإنها تساوى صفر فمثلاً عب = صفر

• الإزاحة (ف) تكون موجبة إذا كانت فى الاتجاه الموجب أى أعلى نقطة القذف ، وسالبة إذا كانت أسفل نقطة القذف.

فمثلاً : عندما يصل الجسيم إلى الموضع أ تكون الإزاحة = و أ موجبة.

وعندما يصل إلى ب (أقصى ارتفاع) تكون الإزاحة = و ب موجبة.

وعندما يصل إلى حـ تكون الإزاحة = و حـ موجبة.

وعندما يعود إلى نقطة القذف (و) تكون الإزاحة = صفرًا

وعندما يهبط إلى نقطة هـ أسفل نقطة القذف تكون الإزاحة = و هـ سالبة

٤ حيث إن عجلة الجاذبية الأرضية للأجسام المقذوفة رأسيًا إلى أعلى تكون سالبة فإن قوانين الحركة المستخدمة فى حركة هذه الأجسام تأخذ الصورة :

ع = ع. − ء ن ، ف = ع. ن − $\frac{1}{2}$ ء ن^2 ، ع^2 = ع.^{2} − ٢ ء ف

٥ الإزاحة فى فترة زمنية ما ليس بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التى قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

فمثلاً : الجسيم عندما يصل إلى الموضع حـ تكون الإزاحة ف = و حـ

بينما المسافة المقطوعة = و ب + ب حـ

وعندما يعود الجسيم إلى نقطة القذف تكون الإزاحة = صفرًا

بينما المسافة المقطوعة = و ب + ب و = ٢ و ب

٦ لاحظ أنه عندما يقذف جسيم رأسيًا إلى أعلى فإنه يتحرك فى الخط الرأسى المار بنقطة القذف ويعود أيضًا فى نفس الخط الرأسى إلا أنه عند حل المسائل يستحسن أن نرسم خط الهبوط بجوار خط الصعود للإيضاح كما بالشكل السابق.

إيجاد زمن ومسافة أقصى ارتفاع لجسيم مقذوف رأسيًا إلى أعلى

∵ ع = ع. − ء ن ، ∵ ع = ٠ عند أقصى ارتفاع

∴ ٠ = ع. − ء ن ∴ ء ن = ع.

∴ ن (زمن الوصول لأقصى ارتفاع) = $\frac{ع.}{ء}$ = $\frac{\text{مقدار سرعة القذف}}{\text{مقدار عجلة الجاذبية الأرضية}}$

، ∵ ع^{٢} = ع.^{٢} − ٢ ء ف ، ع = ٠ عند أقصى ارتفاع

∴ ٠ = ع.^{٢} − ٢ ء ف ∴ ٢ ء ف = ع.^{٢}

∴ ف (أقصى ارتفاع) = $\frac{ع.^{٢}}{٢ ء}$ = $\frac{\text{مربع مقدار سرعة القذف}}{\text{ضعف مقدار عجلة الجاذبية الأرضية}}$

قاعـدة

إذا قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى فإن :

١ زمن الصعود إلى أقصى ارتفاع = زمن الهبوط إلى نقطة القذف.

٢ القياس الجبرى للسرعة التى يعود بها الجسيم إلى نقطة القذف = − (سرعة القذف)

البرهـان

عندما يعود الجسيم إلى نقطة القذف تكون الإزاحة ف = صفرًا

، ∵ ف = ع. ن − $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢} ∴ ٠ = ع. ن − $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢}

∴ ن (ء ن − ٢ ع.) = ٠

∴ ء ن^{٢} − ٢ ع. ن = ٠

∴ ن = صفر أ ، ن = $\frac{٢ ع.}{ء}$

∴ الزمن الذى يستغرقه الجسيم حتى يعود إلى نقطة القذف = $\frac{٢ ع.}{ء}$

ولكن زمن الصعود (أى زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع) = $\frac{ع.}{ء}$

∴ زمن الهبوط (أى زمن العودة من أقصى ارتفاع إلى مكان القذف) = $\frac{٢ ع.}{ء} - \frac{ع.}{ء} = \frac{ع.}{ء}$

∴ زمن الصعود = زمن الهبوط **(المطلوب أولاً)**

، ∵ ع^{٢} = ع.^{٢} − ٢ ء ف ، ف = ٠ ∴ ع^{٢} = ع.^{٢} ∴ ع = ± ع.

الإشارة الموجبة لسرعة القذف والإشارة السالبة للسرعة التى يعود بها جسيم لنقطة القذف.

(المطلوب ثانياً)

نشـــاط

إذا قذفت كرة رأسيًا لأعلى بسرعة أبتدائية مقدارها ١٩,٦ م/ث

فإن : حـ = −٩,٨ م/ث^{٢} (الحركة لأعلى)

، ع = ١٩,٦ − ٩,٨ ن ، ف = ١٩,٦ ن − ٤,٩ ن^{٢}

وباستخدام أى برنامج لرسم العلاقات (مسافة − زمن) ، (سرعة − زمن) ، (عجلة − زمن) فى الفترة ن ∋ [٠ ، ٤] فإننا نحصل على الأشكال التالية :

منحنى (المسافة − الزمن)

منحنى (السرعة − الزمن)

منحنى (العجلة − الزمن)

مثال ٣

قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٢٤,٥ متر/ث احسب أقصى ارتفاع يبلغه عن نقطة القذف والزمن الذى يستغرقه فى الوصول إليه. احسب أيضًا الزمن الذى يستغرقه فى العودة من نقطة أقصى ارتفاع إلى مكان القذف وماذا تكون سرعته عندئذٍ ؟

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

∵ $ع^٢ = ع_.^٢ - ٢ ء ف$ ∴ $٠ = (٢٤,٥)^٢ - ٢ \times ٩,٨ ف$

∴ ف (أقصى ارتفاع) = ٣٠,٦٢٥ مترًا

(يمكن إيجاد أقصى ارتفاع مباشرة من العلاقة $ف = \frac{ع_.^٢}{٢ء} = \frac{(٢٤,٥)^٢}{٢ \times ٩,٨} = ٣٠,٦٢٥$ مترًا)

، ∵ $ع = ع_. - ء ن$ ∴ $٠ = ٢٤,٥ - ٩,٨ ن$

∴ ن (زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع) $= \frac{٢٤,٥}{٩,٨} = ٢,٥$ ثانية.

(يمكن إيجاد زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع مباشرة من العلاقة $ن = \frac{ع_.}{ء} = \frac{٢٤,٥}{٩,٨} = ٢,٥$ ثانية)

، ∵ زمن الصعود = زمن الهبوط

∴ زمن العودة من نقطة أقصى ارتفاع إلى مكان القذف = ٢,٥ ثانية

، ∵ مقدار السرعة التى يعود بها إلى مكان القذف = مقدار سرعة القذف

∴ سرعة الجسيم عند عودته إلى مكان القذف = ٢٤,٥ متر/ث رأسيًا إلى أسفل.

مثال ٤

قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ متر/ث.

احسب سرعته عندما يكون على ارتفاع ١٤,٧ مترًا فوق نقطة القذف.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

∵ $ع^٢ = ع_.^٢ - ٢ ء ف$ ∴ $ع^٢ = (١٩,٦)^٢ - ٢ \times ٩,٨ \times ١٤,٧$

∴ $ع = \pm ٩,٨$ متر/ث

والسرعة الموجبة هى سرعته عندما يكون على ارتفاع ... مترًا من نقطة القذف وهو صاعد إلى أعلى.

والسرعة السالبة هى سرعته عندما يكون على نفس الارتفاع من نقطة القذف وهو هابط إلى أسفل بعد وصوله إلى أقصى ارتفاع.

ملاحظــة :

من المثال السابق نلاحظ أن مقدار سرعة الجسيم عند أى نقطة وهو صاعد تكون مساوية لمقدار سرعته عند مروره بنفس النقطة وهو هابط مع اختلاف اتجاهى السرعتين.

مثال ٥

قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إلى نقطة القذف بعد ٦ ثوانٍ من لحظة قذفه. احسب السرعة التى قذف بها وكذلك أقصى ارتفاع بلغه الجسيم وكذلك سرعته بعد ٤,٥ ثانية من لحظة قذفه.

الحــل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

∵ الجسم عاد إلى موضع القذف بعد ٦ ثوانٍ من لحظة قذفه

∴ زمن الصعود = زمن الهبوط = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ثوانٍ

∵ زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع = $\frac{ع_.}{د}$ ∴ ٣ = $\frac{ع_.}{٩,٨}$

∴ $ع_.$ (السرعة التى قذف بها الجسيم) = ٩,٨ × ٣ = ٢٩,٤ متر/ث

∵ مسافة أقصى ارتفاع = $\frac{ع_.^{٢}}{٢د}$

∴ أقصى ارتفاع يبلغه الجسيم = $\frac{(٢٩,٤)^{٢}}{٢ \times ٩,٨}$ = ٤٤,١ مترًا

، ∵ ع = $ع_.$ − د ن

∴ ع = ٢٩,٤ − ٩,٨ × ٤,٥ = − ١٤,٧ متر/ث

∴ سرعة الجسيم بعد ٤,٥ ثانية = ١٤,٧ متر/ث إلى أسفل

مثال ٦

قذف حجر صغير بسرعة ١٩,٦ م/ث رأسيًا إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٥٦,٨ م عن سطح الأرض أوجد :

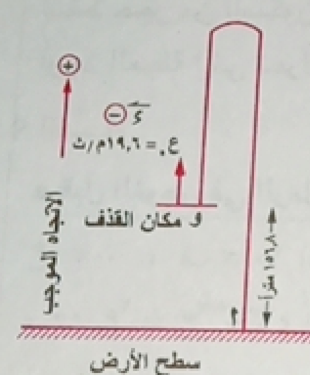
١ الزمن الذى يستغرقه الجسم من لحظة القذف حتى يصل إلى سطح الأرض.

٢ سرعة الجسم عند وصوله إلى سطح الأرض.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

عندما يصل الحجر إلى سطح الأرض فإن :



ف = –١٥٦,٨ متر

، ∵ ف = ع. ن – $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢}

∴ –١٥٦,٨ = ١٩,٦ ن – $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ ن^{٢}

∴ ن^{٢} – ٤ ن – ٣٢ = ٠

∴ (ن – ٨) (ن + ٤) = ٠

∴ ن (زمن الوصول لسطح الأرض) = ٨ ثوانٍ.

، ∵ ع = ع. – د ن ∴ ع = ١٩,٦ – ٩,٨ × ٨

∴ ع (سرعة الوصول لسطح الأرض) = –٥٨,٨ متر/ث

أى أن الحجر يصل إلى سطح الأرض بسرعة مقدارها ٥٨,٨ متر/ث لأسفل.

مثال ٧

من مكان يعلو عن سطح الأرض قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ متر/ث.

عيِّن موضع الجسيم :

١ بعد ٣ ثوانٍ من لحظة قذفه. ٢ بعد ٥ ثوانٍ من لحظة قذفه.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى.

١ ∵ ف = ع. ن – $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢}

∴ ف = ١٩,٦ × ٣ – $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × ٩ = ١٤,٧ مترًا

، ∵ ف موجبة

∴ الجسيم بعد ٣ ثوانٍ يكون أعلى نقطة القذف بمقدار ١٤,٧ مترًا.

٢ ∵ $ف = ع_. ن - \frac{1}{2} ء ن^2$

∴ $ف = ١٩,٦ × ٥ - \frac{1}{2} × ٩,٨ × ٢٥ = -٢٤,٥$ مترًا

، ∵ ف سالبة

∴ الجسيم بعد ٥ ثوانٍ يكون أسفل نقطة القذف بمقدار ٢٤,٥ مترًا.

مثال ٨

سقط حجر من السكون من ارتفاع ١٠ أمتار فوق كومة من الرمل فغاص فيها مسافة ١٩٦ سم

أوجد العجلة التي تحرك بها داخل الرمل.

الحل

- **قبل الغوص فى الرمل :**

$ع_. = ٠$ ، ف = ١٠ أمتار ، ء = ٩,٨ م/ث^2

، ∵ $ع^2 = ع_.^2 + ٢ ء ف$

∴ $ع^2 =$ صفر $+ ٢ × ٩,٨ × ١٠ = ١٩٦$.

∴ ع = ١٤ م/ث

- **بعد الغوص فى الرمل :**

$ع_. = ١٤$ م/ث ، ع = ٠ ، ف = ١,٩٦ متر

، ∵ $ع^2 = ع_.^2 + ٢ ح ف$

∴ صفر $= (١٤)^2 + ٢ ح × ١,٩٦$

∴ $ح = -\frac{(١٤)^2}{٢ × ١,٩٦} = -٥٠$ م/ث^2

ع.=٠
١٠ أمتار
الرمل
١,٩٦ متر
ع=٠

مثال ٩

قذفت كرة صغيرة رأسيًا إلى أعلى من نافذة أحد المنازل وشوهدت الكرة وهى هابطة أمام النافذة بعد ٨ ثوانٍ من قذفها ثم وصلت إلى الأرض بعد ٩ ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد ارتفاع هذه النافذة عن سطح الأرض بالأمتار.

الحل

∵ زمن أقصى ارتفاع $= \frac{٨}{٢} = ٤$ ثوانٍ

، ∵ $ن = \frac{ع_.}{ء}$

∴ ف = ع. ن − $\frac{1}{2}$ ء ن^{2} = ٣٩٫٢ × ٩ − $\frac{1}{2}$ × ٩٫٨ × (٩)^{2} = −٤٤٫١ متر

أى أن النافذة تكون على ارتفاع ٤٤٫١ مترًا عن سطح الأرض.

حل آخر :

∵ زمن أقصى ارتفاع = $\frac{8}{2}$ = ٤ ثوانٍ

، ع = ع. − ء ن

∴ ٠ = ع. − ٩٫٨ × ٤   ∴ ع. = ٣٩٫٢ م/ث

∴ سرعة الكرة لحظة مرورها بنقطة القذف = ٣٩٫٢ م/ث

، ∵ زمن العودة لنقطة القذف = زمن الوصول لأقصى ارتفاع

∴ زمن الوصول من مكان القذف عائدًا لسطح الأرض = ١ ثانية

∴ ف = ع. ن + $\frac{1}{2}$ ء ن^{2} = ٣٩٫٢ × ١ + $\frac{1}{2}$ × ٩٫٨ × (١)^{2} = ٤٤٫١ متر

أى أن ارتفاع النافذة عن سطح الأرض = ٤٤٫١ متر

مثال ١٠

سقطت كرة رأسيًا إلى أسفل من ارتفاع ٢٫٥ مترًا نحو أرض أفقية فاصطدمت بالأرض ثم ارتدت رأسيًا إلى أعلى بسرعة مقدارها يعادل $\frac{4}{5}$ مقدار سرعتها قبل الاصطدام.

أوجد أقصى ارتفاع بلغته الكرة بعد اصطدامها لأول مرة بالأرض.

الحل

- **فى حالة الهبوط :**

∵ ع^{2} = ع.^{2} + ٢ ء ف

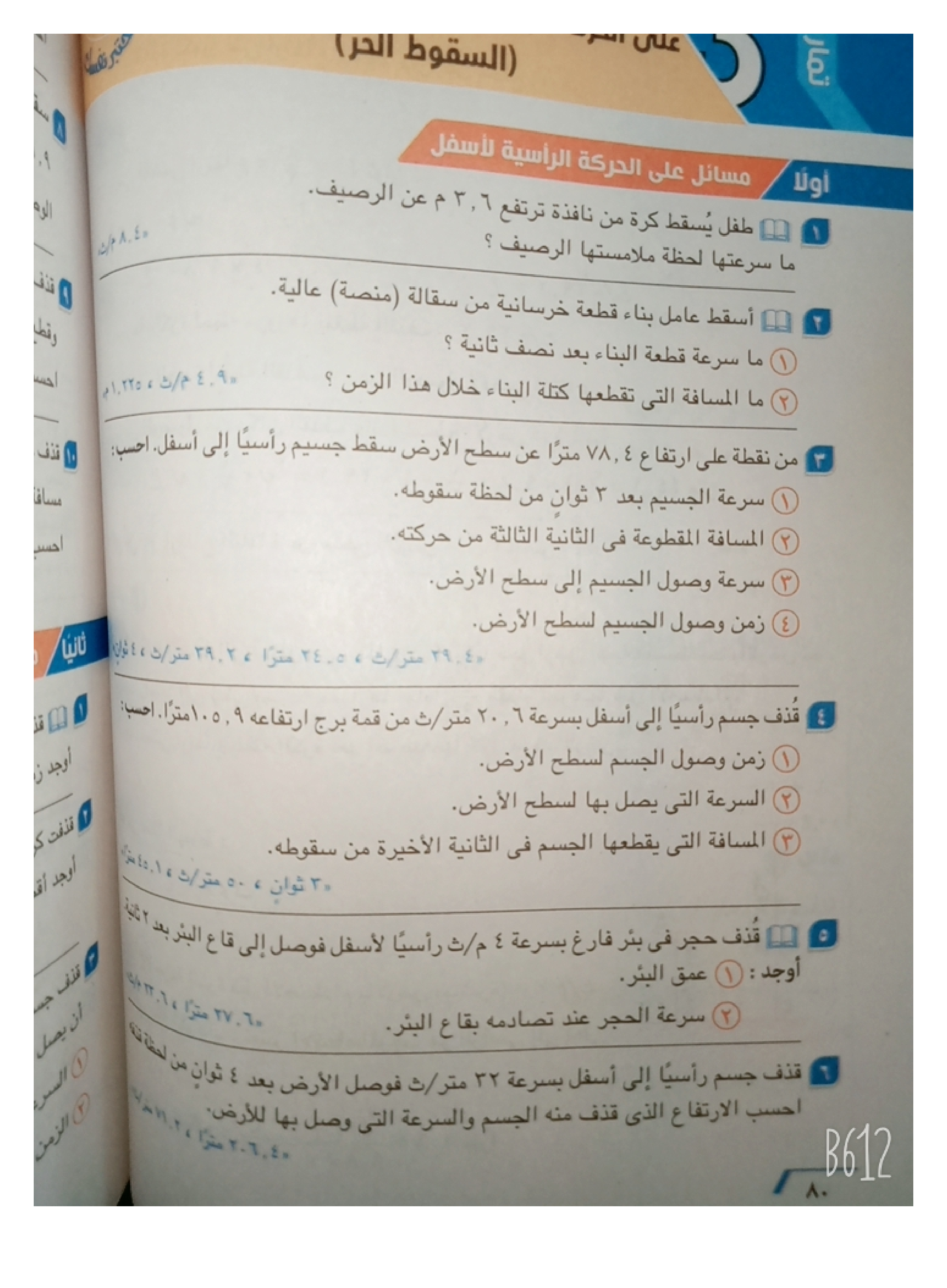
= ٠ + ٢ × ٩٫٨ × ٢٫٥ = ٤٩

∴ ع (سرعة الكرة قبل الاصطدام بالأرض مباشرة) = ٧ م/ث

- **فى حالة الارتداد :** نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

∴ ع. = $\frac{4}{5}$ × ٧ = ٥٫٦ م/ث

∴ أقصى ارتفاع = $\frac{\text{ع.}^{2}}{2\text{ء}}$ = $\frac{(5.6)^{2}}{2 \times 9.8}$ = ١٫٦ مترًا



أولًا مسائل على الحركة الرأسية لأسفل

١ طفل يُسقط كرة من نافذة ترتفع ٣,٦ م عن الرصيف.
ما سرعتها لحظة ملامستها الرصيف ؟
«٨,٤ م/ث»

---

٢ أسقط عامل بناء قطعة خرسانية من سقالة (منصة) عالية.
(١) ما سرعة قطعة البناء بعد نصف ثانية ؟
(٢) ما المسافة التى تقطعها كتلة البناء خلال هذا الزمن ؟
«٤,٩ م/ث ، ١,٢٢٥ م»

---

٣ من نقطة على ارتفاع ٧٨,٤ مترًا عن سطح الأرض سقط جسيم رأسيًا إلى أسفل. **احسب:**
(١) سرعة الجسيم بعد ٣ ثوانٍ من لحظة سقوطه.
(٢) المسافة المقطوعة فى الثانية الثالثة من حركته.
(٣) سرعة وصول الجسيم إلى سطح الأرض.
(٤) زمن وصول الجسيم لسطح الأرض.
«٢٩,٤ متر/ث ، ٢٤,٥ مترًا ، ٣٩,٢ متر/ث ، ٤ ثوانٍ»

---

٤ قُذف جسم رأسيًا إلى أسفل بسرعة ٢٠,٦ متر/ث من قمة برج ارتفاعه ١٠٥,٩ مترًا. **احسب:**
(١) زمن وصول الجسم لسطح الأرض.
(٢) السرعة التى يصل بها لسطح الأرض.
(٣) المسافة التى يقطعها الجسم فى الثانية الأخيرة من سقوطه.
«٣ ثوانٍ ، ٥٠ متر/ث ، ٤٥,١ مترًا»

---

٥ قُذف حجر فى بئر فارغ بسرعة ٤ م/ث رأسيًا لأسفل فوصل إلى قاع البئر بعد ٢ ثانية.
أوجد : (١) عمق البئر.
(٢) سرعة الحجر عند تصادمه بقاع البئر.
«٢٧,٦ مترًا ، ٢٣,٦ م/ث»

---

٦ قذف جسم رأسيًا إلى أسفل بسرعة ٣٢ متر/ث فوصل الأرض بعد ٤ ثوانٍ من لحظة قذفه.
احسب الارتفاع الذى قذف منه الجسم والسرعة التى وصل بها للأرض.
«٢٠٦,٤ مترًا ، ٧١,٢ م/ث»

٧ سقط جسم من قمة برج فقطع فى الثانية الأخيرة من سقوطه مسافة ١٩,٦ مترًا
احسب ارتفاع البرج.
«$\frac{5}{8}$ ٢٠ مترًا»

٨ سقط جسيم من قمة برج ارتفاعه ٣٢,٤ مترًا ، أوجد سرعته عندما يكون على ارتفاع ٩,٩ مترًا من سطح الأرض ، وكذلك سرعته فى لحظة منتصف الزمن الذى يستغرقه فى الوصول للأرض.
«٢١ متر/ث ، ١٢,٦ متر/ث»

٩ قذف جسيم رأسيًا إلى أسفل فقطع مسافة ٥٠ مترًا فى الثانية الثالثة من لحظة سقوطه وقطع مسافة ١٣٠ مترًا فى الثانيتين الرابعة والخامسة.
احسب السرعة التى قذف بها وعجلة الجاذبية فى هذا المكان. «٢٥ متر/ث ، ١٠ متر/ث^2»

١٠ قذف جسيم رأسيًا إلى أسفل من قمة برج ارتفاعه ٢٤٠ مترًا عن سطح الأرض فقطع مسافة ١٥,٥ مترًا خلال الثانية الأولى من سقوطه.
احسب الزمن الذى يستغرقه فى الوصول إلى الأرض والسرعة التى يصل بها للأرض.
«٦ ثوانٍ ، ٦٩,٤ متر/ث»

ثانيًا مسائل على الحركة الرأسية لأعلى

١ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤٩ م/ث.
أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التى وصل إليها. «٥ ثوانٍ ، ١٢٢,٥ متر»

٢ قذفت كرة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث.
أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه وكذلك الزمن الذى تستغرقه حتى تعود إلى مكان القذف.
«١٩,٦ مترًا ، ٤ ثوانٍ»

٣ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض. فإذا كان أقصى ارتفاع يمكن أن يصل إليه الجسيم هو ٤٤,١ مترًا. فأوجد :
(١) السرعة التى قذف بها الجسيم.
(٢) الزمن الذى يمضى من لحظة قذفه حتى يعود إلى سطح الأرض. «٢٩,٤ م/ث ، ٦ ثوانٍ»

٤ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٣٩,٢ متر/ث أوجد :

(١) الزمن الذى يستغرقه من لحظة قذفه حتى يعود إلى مكان القذف.

(٢) الزمن الذى يمضى حتى يصبح الجسيم على ارتفاع ٣٤,٣ مترًا من نقطة القذف.

فسِّر معنى الجوابين.

«٨ ثوانٍ ، ١ ، ٧ ثوانٍ»

---

٥ 📖 قُذف جسم رأسيًا لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ١٠ ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد :

(١) السرعة الابتدائية.　　　(٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

«٤٩ م/ث ، ١٢٢,٥ متر»

---

٦ قذف حجر رأسيًا إلى أعلى من قمة برج بسرعة ١٤,٧ متر/ث فوصل إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوانٍ من لحظة قذفه. أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض والسرعة التى يصل بها الحجر إلى الأرض وأوجد أيضًا الزمن الذى يمضى من لحظة القذف حتى يصبح على بُعد ٢٩,٤ مترًا من سطح الأرض.

«٤٩ مترًا ، ٣٤,٣ متر/ث ، ٤ ثوانٍ»

---

٧ 📖 قذف جسيم من قمة برج رأسيًا إلى أعلى بسرعة مقدارها ٢٤,٥ م/ث فوصل إلى سطح الأرض بعد ٨ ثوانٍ أوجد :

(١) ارتفاع البرج.　　　(٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض.

(٣) المسافة التى يقطعها الجسم خلال هذه المدة.

«١١٧,٦ متر ، ١٤٨,٢٢٥ متر ، ١٧٨,٨٥ متر»

---

٨ من قمة برج ارتفاع ٩,٨ مترًا قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ٤,٩ م/ث أوجد :

(١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم من نقطة القذف.

(٢) الزمن الذى يستغرقه الجسم وهو هابط حتى تصبح سرعته ١١,٢ م/ث

(٣) زمن وصول الجسم إلى نقطة القذف.

(٤) زمن وصول الجسم إلى سطح الأرض.

(٥) سرعة الجسيم لحظة وصوله إلى سطح الأرض.

«١,٢٢٥ متر ، $\frac{8}{7}$ ثانية ، ١ ثانية ، ٢ ثانية ، ١٤,٧ م/ث»

٩ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى من مكان يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ١٤٠ مترًا فوجد أنه قطع فى الثانية الثالثة وهو صاعدًا مسافة ١٠,٥ مترًا. أوجد :

(١) السرعة التى قذف بها الجسيم.

(٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.

(٣) الزمن الذى يستغرقه للوصول إلى سطح الأرض.

«٣٥ متر/ث ، ٢٠٢,٥ مترًا ، ١٠ ثوانٍ»

١٠ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ متر/ث من نقطة تعلو سطح الأرض بمقدار ٢٣٠,٤ مترًا. أوجد :

(١) أقصى ارتفاع عن سطح الأرض يصله الجسيم.

(٢) موضع الجسيم بالنسبة لنقطة القذف بعد ٥ ثوانٍ من لحظة قذفه.

(٣) أقصى سرعة يكتسبها الجسيم.

«٢٥٠ مترًا ، ٢٤,٥ مترًا لأسفل ، ٧٠ متر/ث»

١١ قذف جسم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٤ م/ث من نقطة على ارتفاع ٣٥٠ مترًا من سطح الأرض. أوجد :

(١) الزمن الذى يأخذه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض.

(٢) المسافة الكلية التى قطعها الجسم حتى وصوله لسطح الأرض.

«١٠ ثوان ، ٣٧٠ متر»

١٢ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٢٤ متر/ث.

أوجد الزمن الذى يستغرقه حتى يصل إلى موضع أسفل نقطة القذف بمقدار ٣٢,٤ مترًا وكم تكون سرعته عندئذٍ ؟

«٦ ثوانٍ ، ٣٤,٨ متر/ث إلى أسفل»

١٣ قذفت كرة رأسيًا لأعلى من قمة برج رأسى بسرعة ٢٤,٥ م/ث. أوجد :

(١) متى تصل الكرة إلى ارتفاع ٢٩,٤ متر فوق موضع قذفها.

(٢) متى تصل الكرة إلى بُعد ٢٩,٤ متر تحت موضع قذفها.

«٢ ، ٣ ثانية ، ٦ ثانية»

١٤ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٢٤,٥ متر/ث

عيِّن موضع الجسيم واتجاه حركته بعد $ن$ ثانية من لحظة قذفه إذا كانت $ن$ تساوى :

(١) ٢ ثانية. (٢) ٤ ثوانٍ. (٣) ٥ ثوانٍ. (٤) ٦ ثوانٍ.

(١٥) قذف حجر رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ متر/ث من نقطة على سطح الأرض أسفل منزل ارتفاعه ١٤,٧ مترًا.
احسب الزمن الذي يستغرقه الحجر حتى يهبط عند سطح المنزل وكم تكون سرعته حينئذ؟
«٣ ثوانٍ ، ٩,٨ متر/ث»

(١٦) قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ٢٨ م/ث من سطح الأرض فسقط على سطح منزل بعد ٤ ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد ارتفاع المنزل وأقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.
«٣٣,٦ مترًا ، ٤٠ مترًا»

ثالثًا مسائل متنوعة

(١) أكمل كلاً مما يأتي بوضع الرمز المناسب (ع. ، ع ، ف ، ء ، ن):

① إذا سقط جسم رأسيًا لأسفل فإن : .... = صفر

② إذا وصل جسم إلى أقصى ارتفاع فإن : .... = صفر

③ إذا عاد الجسم إلى نقطة القذف فإن : .... = صفر

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا قذف جسم رأسيًا إلى أعلى بسرعة (ع.) م/ث إلى أقصى ارتفاع (ف) متر فإن زمن الوصول لأقصى ارتفاع (ن) يساوي .... ثانية.

(أ) $\frac{ع_.}{٢ء}$ (ب) $\frac{ع_.}{ء}$ (جـ) $\frac{ع_.^٢}{٢ء}$ (د) $\frac{٢ ع_.}{ء}$

② قذف جسم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٢٤,٥ م/ث فإنه يعود إلى نقطة القذف بعد .... ثانية.

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) صفر

③ إذا قذف جسم رأسيًا إلى أعلى من سطح الأرض فعاد إلى نقطة القذف بعد ١٢ ثانية فإن زمن الهبوط = ... ثانية.

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

④ إذا قذف جسم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ١٠ ثوان فإن أقصى ارتفاع يصل إليه = ... متر.

(أ) ١٢٢,٥ (ب) ٢٤٥ (جـ) ٤٩ (د) ٤٩٠

⑤ إذا سقط جسم من ارتفاع ١٠ أمتار على أرض أفقية فإن سرعته لحظة اصطدامه بالأرض بوحدة م/ث هى ....

(أ) صفر (ب) ٢٠ (جـ) ١٤ (د) ١٩٦

⑥ قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ٤٢ م/ث فإن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يساوى .... متر.

(أ) ٦٥ (ب) ٩٨ (جـ) ٨٤ (د) ٩٠

⑦ إذا سقط جسم من ارتفاع ١٩,٦ متر على أرض رملية فغاص فيها ١٤ سم حتى سكن فأوجد عجلة حركة الجسم داخل الرمل بوحدة م/ث^{٢} ....

(أ) -١٣٧٢ (ب) -٩,٨ (جـ) ١٩,٦ (د) ١٧٣٢

⑧ إذا كان حيوان الكانجرو يستطيع أن يقفز إلى ارتفاع ٢,٥ متر فإن السرعة التى يقفز بها الكانجرو ليصل لهذا الارتفاع = ... م/ث

(أ) ٥,٨ (ب) ٦,٤ (جـ) ٧ (د) ٧,٢

⑨ قذف جسم رأسيًا لأعلى من نقطة على سطح الأرض فقطع مسافة ١٦ متر خلال ن ثانية الأولى وهو صاعد فإن المسافة التى يقطعها خلال ن ثانية الأخيرة وهو هابط تساوى .... متر.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑩ قذف جسم رأسيًا لأسفل بسرعة ٢٠ م/ث من طائرة تتحرك لأعلى بسرعة ١٨٠ كم/س فإن السرعة الابتدائية للجسم هى ....

(أ) ١٦٠ م/ث لأسفل. (ب) ٣٠ م/ث لأعلى.

(جـ) ٧٠ م/ث لأعلى. (د) ٣٠ م/ث لأسفل.

⑪ سقطت كرة ملساء من يد رجل يقف داخل مصعد كهربائى يتحرك رأسيًا لأسفل بسرعة منتظمة ٥٠ سم/ث فإن سرعة الكرة بعد $\frac{1}{2}$ ثانية هى ....

(أ) ٥٠ سم/ث (ب) ٢٥ سم/ث (جـ) ٥٤,٩ سم/ث (د) ٥,٤ م/ث

⑫ إذا سقط جسم فإن المسافات التى يقطعها هذا الجسم خلال الثلاث ثوانى الأولى هى على الترتيب ....

(أ) ٩,٨ متر ، ٩,٨ متر ، ٩,٨ متر. (ب) ٤,٩ متر ، ١٤,٧ متر ، ٢٤,٥ متر.

(جـ) ٢٤,٥ متر ، ١٤,٧ متر ، ٤,٩ متر. (د) ٩,٨ متر ، ١٩,٦ متر ، ٢٩,٤ متر.

(١٣) قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية ٤٠ م/ث فإن الفترة الزمنية التى يكون عندها ارتفاع الجسم عن الأرض أكبر من ارتفاع المبنى هى ....

(أ) من ن = ٤ ثانية إلى ن = ٨ ثانية. (ب) من ن = صفر إلى ن = ٤ ثانية.

(جـ) من ن = صفر إلى ن = ٨ ثانية. (د) من ن = ٢ إلى ن = ٨ ثانية.

---

٣ من أعلى تل ارتفاعه ٩,٨ مترًا قذف جسم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤,٩ م/ث أوجد:

(١) سرعة الجسم عند لحظة وصوله إلى أسفل التل.

(٢) الزمن الذى استغرقه للوصول إلى أسفل التل.

«١٤,٧ م/ث ، ٢ ثانية»

---

٤ قذفت كرة رأسيًا إلى أعلى من نافذة فوصلت إليها بعد ٤ ثوانٍ من لحظة القذف ووصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد :

(١) سرعة قذف الكرة.

(٢) أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة من نقطة القذف.

(٣) ارتفاع النافذة من سطح الأرض.

«١٩,٦ م/ث ، ١٩,٦ متر ، ٢٤,٥ متر»

---

٥ من قمة برج قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى وشوهد أمام نقطة القذف وهو هابط بعد ٤ ثوانٍ من لحظة قذفه ووصل إلى سطح الأرض بعد ٣ ثوانٍ أخرى.

أوجد ارتفاع البرج وكذلك أقصى ارتفاع للجسيم عن سطح الأرض.

«١٠٢,٩ مترًا ، ١٢٢,٥ مترًا»

---

٦ يتدرب طالب على ركل كرة القدم رأسيًا إلى أعلى فى الهواء ، ثم تعود الكرة أثر كل ركلة فتصطدم بقدمه ، فإذا استغرقت الكرة من لحظة ركلها وحتى اصطدامها بقدمه ٠,٣ ثانية. أوجد :

(١) السرعة الابتدائية.

(٢) الارتفاع الذى وصلت إليه الكرة بعد أن ركلها الطالب.

«١,٤٧ م/ث ، ٠,١١٠٢٥ مترًا»

٧ سقط جسم من ارتفاع ف عن سطح الأرض فقطع فى الثانية الأخيرة من حركته ٣٤,٣ مترًا.
أوجد :
(١) سرعة وصول الجسم إلى سطح الأرض.
(٢) الارتفاع الذى سقط منه الجسم.
«٣٩,٢ م/ث ، ٧٨,٤ متر»

٨ سقط جسم من ارتفاع ف مترًا فقطع فى الثانية الأخيرة $\frac{٩}{٢٥}$ ف مترًا. أوجد :
(١) الارتفاع الذى سقط منه.
(٢) سرعة الجسم لحظة الوصول لسطح الأرض.
«١٢٢,٥ مترًا ، ٤٩ م/ث»

٩ سقط جسم رأسيًا إلى أسفل من ارتفاع ما نحو أرض رخوة فغاص فيها مسافة ١٤ سم قبل أن يسكن فإذا كان الجسم يتحرك داخل الأرض بتقصير منتظم مقداره ٦٣ م/ث^{٢}. فما هو الارتفاع الذى سقط منه الجسيم.
«٠,٩ متر»

١٠ سقط جسم من ارتفاع ٢٢,٥ مترًا على أرض رملية فغاص فيها مسافة ٢٥ سم.
احسب كلاً من :
(١) سرعة الجسم عند سطح الأرض.
(٢) العجلة التى تحرك بها الجسم داخل الأرض الرملية.
«٢١ م/ث ، -٨٨٢ م/ث^{٢}»

١١ سقط جسم من ارتفاع ٦,٤ مترًا عن سطح أرض رملية فغاص فى الرمل مسافة ٣٢ سم.
أوجد :
(١) العجلة المنتظمة التى تحرك بها الجسم داخل الرمل.
(٢) الزمن الذى استغرقه من لحظة سقوطه حتى سكن فى الرمل.
«-١٩٦ م/ث^{٢} ، ١,٢ ثانية»

١٢ سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٠ أمتار ، فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسيًا إلى أعلى مسافة $٢\frac{١}{٢}$ متر.
احسب سرعة الكرة قبل وبعد اصطدامها بالأرض مباشرة.
«١٤ م/ث ، ٧ م/ث»

١٣ سقطت كرة من ارتفاع ٩٠ متر عن سطح الأرض وعند وصولها للأرض ارتدت ثانية إلى أعلى بسرعة تساوى نصف سرعة وصولها إلى الأرض.
أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.
«٢٢,٥ متر»

١٤ من قمة برج يعلو ١٩٦ مترًا عن سطح الأرض قذف جسمان أحداهما رأسى إلى أسفل والآخر رأسى إلى أعلى. فما هو الزمن الذى يستغرقه كل منهما فى الوصول إلى سطح الأرض ؟

« ٥ ، ٨ ثوانٍ »

١٥ سقط جسم من ارتفاع ٤٠ مترًا عن سطح الأرض وفى نفس اللحظة ومن سطح الأرض قذف جسم آخر رأسيًا لأعلى بسرعة ٢٠ م/ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية $ن$. أوجد:

(١) الفترة الزمنية $ن$

(٢) المسافة التى قطعها كل منهما.

« ٢ ثانية ، ١٩.٦ مترًا ، ٢٠.٤ مترًا »

١٦ سقط جسم من ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الأرض ، وفى نفس اللحظة قذف جسم آخر رأسيًا لأعلى من سطح الأرض بسرعة ٢٠ م/ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية. أوجد هذا الزمن ، ثم أوجد المسافة التى قطعها كل من الجسمين خلال هذه الفترة الزمنية ، ثم اذكر هل الجسمان لحظة التقابل متحركان فى اتجاهين متضادين أم فى نفس الاتجاه.

« ٣ ثوانٍ ، ٤٤.١ متر ، $\frac{٤٤٩}{٤٩٠}$ ٢٤ متر ، فى نفس الاتجاه »

١٧ جسم ساكن على ارتفاع ٦.١٢٥ متر من سطح الأرض مربوط بخيط يشد الجسم رأسيًا إلى أعلى بعجلة ٢.٤٥ م/ث^{٢} وبعد ثانيتين من بدء الحركة قطع الخيط. **أوجد :**

(١) سرعة الجسم قبل قطع الخيط مباشرة.

(٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض.

(٣) سرعة الجسم عند وصوله سطح الأرض.

« ٤.٩ م/ث ، ١٢.٢٥ متر ، ٤.٩ $\sqrt{١٠}$ م/ث »

١٨ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤٠ متر/ث من نقطة على سطح الأرض وبعد ثانية قذف جسيم آخر من نفس النقطة وبنفس السرعة الابتدائية للجسيم الأول. بعد كم ثانية وعلى أى ارتفاع يتلاقى الجسيمان
(اعتبر عجلة الجاذبية الأرضية $ء$ = ١٠ متر/ث^{٢}) ؟

« ٤.٥ ثانية ، ٧٨.٧٥ مترًا »

١٩ منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ١٤.٧ متر/ث سقط منه جسيم فوصل سطح الأرض بعد ٤ ثوانٍ من لحظة سقوطه.

احسب ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض لحظة سقوط الجسيم منه فى كل من الحالتين الآتيتين:

(١) المنطاد يتحرك رأسيًا إلى أسفل.

(٢) المنطاد يتحرك رأسيًا إلى أعلى.

« ١٣٧.٢ مترًا ، ١٩.٦ مترًا »

٢٠ يرتفع منطاد رأسيًا إلى أعلى بسرعة منتظمة مقدارها ٢٤,٥ م/ث وعندما وصل إلى ارتفاع ٢٤٥ مترًا من سطح الأرض سقط منه جسيم أوجد :

(١) أقصى ارتفاع يصل إليه هذا الجسيم بالنسبة لسطح الأرض.

(٢) السرعة التى يصل بها الجسيم للأرض.

(٣) الزمن الذى يستغرقه فى الوصول للأرض.

(٤) ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض لحظة وصول الجسيم لسطح الأرض.

«$\frac{5}{8}$ ٢٧٥ مترًا ، ٧٣,٥ متر/ث ، ١٠ ثوانٍ ، ٤٩٠ مترًا»

---

٢١ منطاد يصعد رأسيًا إلى أعلى بسرعة منتظمة ٢٨ متر/ث قذف منه حجر رأسيًا إلى أسفل بسرعة ١٢,٥ متر/ث فوصل إلى الأرض بعد ٥ ثوانٍ من لحظة قذفه. أوجد :

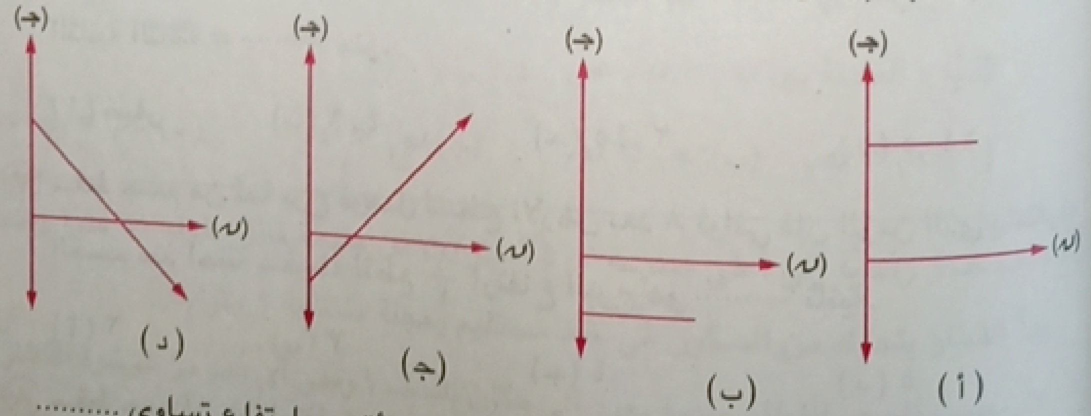
(١) ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض لحظة وصول الحجر لها.

(٢) مقدار واتجاه سرعة الحجر بعد ٤ ثوانٍ من لحظة قذفه. «١٨٥ مترًا ، ٢٣,٧ م/ث لأسفل»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ولد يقف أعلى كوبرى يرمى حجر بيده لأسفل وباعتبار الاتجاه لأعلى هو الاتجاه الموجب فإن أى من الأشكال الآتية تمثل العلاقة بين العجلة والزمن ؟



(٢) قذف جسم رأسيًا لأعلى فإن عجلة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوى ....

(أ) صفر

(ب) ٩,٨ م/ث^2 لأسفل.

(جـ) ٩,٨ م/ث^2 لأعلى.

(د) تعتمد على سرعة القذف.

③ جسمان كتلتيهما ١٠ كجم ، ٢٠ كجم وقعا من نفس الارتفاع وبإهمال مقاومة الهواء إذا كانت الكتلة ٢٠ كجم تأخذ زمن (ن) حتى تصل إلى الأرض فإن الزمن الذى تأخذه الكتلة ١٠ كجم حتى تصل للأرض = ...

(أ) ن (ب) ٢ ن (جـ) $\frac{1}{2}$ ن (د) $\frac{1}{4}$ ن

④ تم قذف كرتان بنفس السرعة الابتدائية من أعلى منزل إحداهما لأعلى والأخرى لأسفل. قارن بين سرعتى الكرتان قبل الوصول للأرض مباشرة.

(أ) الكرة التى قذفت لأعلى تتحرك أسرع لأن سرعتها الابتدائية لأعلى.

(ب) الكرة التى قذفت لأسفل تتحرك أسرع لأن سرعتها الابتدائية لأسفل.

(جـ) لهما نفس السرعة.

(د) الكرة التى قذفت لأعلى تتحرك أسرع لأن عجلتها أكبر.

⑤ سقط جسم (أ) من قمة مبنى ثم بعد ١ ثانية سقط جسم آخر (ب) من نفس المبنى بإهمال مقاومة الهواء فإن الفرق بين سرعتيهما مع تقدم الزمن ....

(أ) يزداد. (ب) يقل.

(جـ) يظل ثابت. (د) لا يمكن تحديدها.

⑥ قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ٢٤,٥ م/ث فإن المسافة المقطوعة فى الثانية الثالثة = ... متر.

(أ) صفر (ب) ٤,٩ (جـ) ٢,٤٥ (د) ٢٤,٥

⑦ سقط جسم من قمة برج فوصل لسطح الأرض بعد ٨ ثوانى فإن الزمن الذى يستغرقه الجسم منذ لحظة سقوطه لقطع $\frac{1}{4}$ ارتفاع البرج هو .... ثانية.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

⑧ سقط جسمان من ارتفاعان ف ، ٣ ف على الترتيب فإن النسبة بين سرعتيهما عند وصولهما للأرض هى ....

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : $\sqrt{3}$ (جـ) ١ : ٩ (د) ٣ : ١

٢٣ قذف ...
بدأ ال...
هل يـ...

⑨ إذا وقعت بيضة من عش عصفور فى شجرة ارتفاعه ٢,٥ متر وتوجد بنت تبعد عن قاعدة الشجرة ١٣ متر فتحركت البنت بسرعة منتظمة حتى تصل وتلحق بالبيضة قبل أن تصل للأرض بالكاد فإن سرعة البنت اللازمة لذلك هى .... م/ث

(أ) ١,٣٣ (ب) ٢,٧٥ (جـ) ٩,٨٣ (د) ١٨,٢

⑩ يتدرب لاعب الجمباز بالقفز لأعلى مرتين فى المرة الأولى كانت السرعة الابتدائية ($ع_.$) وفى المرة الثانية زادت سرعته الابتدائية حتى أصبحت (٤ $ع_.$) فإن :

$$\frac{\text{أقصى ارتفاع يصل إليه فى المحاولة الثانية}}{\text{أقصى ارتفاع يصل إليه فى المحاولة الأولى}} = \text{..........}$$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑪ يهبط أحد جنود المظلات رأسيًا لأسفل بسرعة منتظمة وعندما كان على ارتفاع (ف) متر من سطح الأرض سقط منه عملة معدنية فإذا كانت سرعة الرجل عند وصوله سطح الأرض هى ($ع_1$) وزمن وصول الرجل للأرض منذ لحظة سقوط العملة هو ($ن_1$) وسرعة العملة المعدنية عند وصولها سطح الأرض هى ($ع_2$) وزمن وصول العملة المعدنية للأرض هى $ن_2$ فإن :

أولًا : العلاقة بين $ع_1$ ، $ع_2$ هى ....

(أ) $ع_1 = ع_2$ (ب) $ع_1 > ع_2$ (جـ) $ع_1 < ع_2$ (د) $ع_1 = \frac{1}{2} ع_2$

ثانيًا : العلاقة بين $ن_1$ ، $ن_2$ هى ....

(أ) $ن_1 = ن_2$ (ب) $ن_1 > ن_2$ (جـ) $ن_1 < ن_2$ (د) $ن_2 = \frac{1}{2} ن_1$

---

٢٣ قذف حجر رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٣٤,٣ متر/ث من مقدمة قطار طوله ٦٠ مترًا وقتما بدأ القطار يتحرك من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٢ متر/ث^2 هل يصيب الحجر القطار عندما يعود إلى مكان القذف ؟ وعلى أى بُعد من مؤخرة القطار ؟

«نعم ، ١١ مترًا»



الدرس 4

قانون الجذب العام

علمنا أن أى جسيم يسقط لأسفل أو يتم قذفة لأسفل أو لأعلى فإنه يتحرك بعجلة تسمى بعجلة الجاذبية الأرضية ولكن ما سبب وجود هذه الجاذبية ولماذا تختلف من مكان لآخر فتقل كلما اقتربنا من خط الاستواء وتزداد كلما اقتربنا من أحد القطبين. وهل الجاذبية هذه خاصة بالكرة الأرضية فقط أم موجوده فى باقى الأجرام السماوية وهل الكرة الأرضية نفسها تقع تحت تأثير جاذبية أجرام سماوية أخرى ... وهكذا.

كل هذه الأسئلة يجيب عنها قانون الجذب العام لنيوتن والذى نشره فى بحثه الرياضى «مبادئ الفلسفة الطبيعية» والذى نص على :

> كل الأجسام فى الكون تتجاذب مع الأجسام الأخرى بتأثير قوة متبادلة مباشرة تتناسب طرديًا مع كل من كتلتى الجسمين وعكسيًا مع مربع المسافة بين مركزيهما.

أى أن $ق \propto \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$ ومنها $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

حيث :

- $ق$: قوة الجذب المتبادلة بين الجسمين بالنيوتن.
- $ك_١$ ، $ك_٢$: كتلتا الجسمين بالكجم
- ف : المسافة بين مركزى الجسمين بالمتر.
- ث : ثابت الجذب العام.

ويعرف أيضًا قانون الجذب العام بقانون التربيع العكسى.

تعريف : ثابت الجذب العام

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين مقدار كل منهما ١ كيلوجرام والمسافة بين مركزيهما ١ متر ويساوى تقريبًا $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. م^{٢} / كجم^{٢}

مثال ١

كرتان كتلة الأولى ١٠ كجم والثانية ٥ كجم وضعا بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٠,٥ متر احسب قوة التجاذب بينهما علمًا بأن ثابت الجذب العام = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.م^{٢} / كجم^{٢}

الحل

$\because$ $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

$\therefore$ قوة الجذب بين الكرتين = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١٠ \times ٥}{(٠,٥)^٢} = ١,٣٣٤ \times ١٠^{-٨}$ نيوتن.

وهى قوة صغيرة جدًا.

ملاحظــات :

١ عندما تسقط تفاحة مثلًا على الأرض فإن قوة التجاذب بين التفاحة والأرض هى قوة متبادلة حيث أن الأرض تجذب التفاحة والتفاحة بدورها تجذب الأرض.

٢ تقل قوة الجذب بين كتلتين كلما زادت المسافة بين مركزيهما.

٣ تزداد قوة الجذب بين كتلتين كلما قلت المسافة بين مركزيهما.

٤ كل الأجسام حولنا والتى تبدو ساكنة بالنسبة لبعضها البعض يوجد بينها قوى تجاذب متبادلة ولكنها صغيرة بدرجة لا تقوى على تحريك هذه الأجسام.

٥ قوة جذب الأرض لجسم كتلته (ك) كجم = وزن الجسم = ك ء

مثال ٢

احسب قوة التجاذب المتبادلة بين كل من الشمس وكوكب المشترى بفرض أن كتلة الشمس ٢×١٠^{٣٠} كجم وكتلة المشترى $١,٨٩ \times ١٠^{٢٧}$ كجم والمسافة بين مركزيهما $٧,٧٣ \times ١٠^{١١}$ متر علمًا بأن ثابت الجذب العام $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. م^{٢}/كجم^{٢}

الحل

$\because$ $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

$\therefore$ قوة التجاذب المتبادلة = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{٢ \times ١٠^{٣٠} \times ١,٨٩ \times ١٠^{٢٧}}{(٧,٧٣ \times ١٠^{١١})^٢}$

$\simeq ٤,٢٢ \times ١٠^{٢٣}$ نيوتن.

مثال ٣

قمر صناعى كتلته ١٥٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٥٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦×١٠^{٢٤} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم. أوجد قوة جذب الأرض للقمر بالنيوتن علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. م^{٢}/كجم^{٢}

الحل

ف = ٦٣٦٠ + ٥٤٠ = ٦٩٠٠ كم = ٦٩٠٠٠٠٠ متر

، ∵ $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

∴ قوة جذب الأرض للقمر = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١٥٠٠ \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{(٦٩٠٠٠٠٠)^٢} \simeq ١,٢٦ \times ١٠^{٤}$ نيوتن.

> **لاحظ أن**
>
> تم اهمال نصف قطر القمر الصناعى لصغره جدًا بالنسبة لنصف قطر الأرض

مثال ٤

إذا كانت قوة جذب الأرض للقمر هى : $٣,١١ \times ١٠^{٢٤}$ نيوتن وكانت كتلة الأرض ٦×١٠^{٢٤} كجم وكتلة القمر ٧×١٠^{٢٢} كجم فأوجد المسافة بين مركزيهما إذا كان ثابت الجذب العام $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.متر^{٢}/كجم^{٢}

الحل

∵ $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

∴ $٣,١١ \times ١٠^{٢٤} = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{٦ \times ١٠^{٢٤} \times ٧ \times ١٠^{٢٢}}{ف^٢}$

∴ $ف \simeq ٣ \times ١٠^{٦}$ متر

> **معلومة إثرائية**
>
> إذا كان هناك قوى تجاذب هائلة بين الأجرام السماوية وبعضها البعض كالأرض والقمر والأرض والشمس ... وهكذا. فلماذا لا يقترب القمر من الأرض إلى أن يصطدم بها وكذلك الأرض والشمس وباقى الأجرام السماوية ؟
>
> يرجع ذلك لسبب أن الأرض مثلًا تدور حول الشمس فى مسار شبه دائرى بسرعة تكسبها ما يسمى بقوة الطرد المركزية وهذه القوة تتوازن مع قوة الجذب مما يحافظ على وجود كل جرم سماوى فى مداره.

مثال ٥

احسب كتلة الأرض بالكجم إذا علمت أن طول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم وبأن ثابت الجذب العام $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.م^٢/كجم^٢ ، وعجلة الجاذبية الأرضية ء = ٩,٨ م/ث^٢

الحل

بفرض أن جسمًا كتلته $ك_١$ موضوع على سطح الأرض

، ∵ وزن الجسم هو قوة جذب الأرض للجسم وليكن كتلتها $ك_٢$

∴ $ك_١$ ء = ث × $\frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$ ∴ $٩,٨ = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{ك_٢}{(٦٣٦٠٠٠٠)^٢}$

∴ $ك_٢$ (كتلة الأرض) ≃ ٦×١٠^{٢٤} كجم.

مثال ٦

احسب طول نصف قطر الأرض بفرض أن جسمًا كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها علمًا بأن كتلة الأرض تساوى ٦×١٠^{٢٤} و ثابت الجذب العام $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.م^٢ / كجم^٢

، وعجلة الجاذبية الأرضية ء = ٩,٨ م/ث^٢

الحل

∵ وزن الجسم هو قوة جذب الأرض له

∴ $ك_١$ ء = ث × $\frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$ حيث $ك_١$ كتلة الجسم ، $ك_٢$ كتلة الأرض.

∴ $١ \times ٩,٨ = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١ \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{نق^٢}$

∴ نق (طول نصف قطر الأرض) = ٦٣٩٠٣٦٢,٦٤٢ متر ≃ ٦٣٩٠ كم.

مثال ٧

احسب عجلة الجاذبية الأرضية بوحدة م/ث^٢ لجسم كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها.

علمًا بأن كتلة الأرض تساوى $٥,٩٥ \times ١٠^{٢٤}$ كجم ، نصف قطر الأرض يساوى ٦٣٦٠ كم

، ثابت الجذب العام = $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.م^٢ / كجم^٢.

الحل

∵ وزن الجسم هو قوة جذب الأرض له

$∴ ك_1 ء = ث \times \frac{ك_1 ك_2}{ف^2}$ حيث $ك_1$ كتلة الجسم ، $ك_2$ كتلة الأرض.

$$∴ ١ \times ء = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١ \times ٥,٩٥ \times ١٠^{٢٤}}{(٦٣٦٠٠٠٠)^2}$$

∴ ء (عجلة الجاذبية الأرضية) ≃ ٩,٨١ متر/ث^2.

المقارنة بين عجلتى الجاذبية على سطحى كوكبين

بفرض $ء_1$ ، $ء_2$ عجلتى الجاذبية على سطحى كوكبين كتلتاهما $ك_1$ ، $ك_2$ كجم وطولا نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ متر وكان جسم كتلته ك كجم موضوع على سطح أحد الكوكبين.

* **بالنسبة للكوكب الأول :**

∵ وزن الجسم على الكوكب = قوة جذب الكوكب للجسم

$$∴ ك ء_1 = ث \times \frac{ك ك_1}{نق_1^2} \quad (١)$$

* **بالنسبة للكوكب الثانى :**

∵ وزن الجسم على الكوكب = قوة جذب الكوكب للجسم

$$∴ ك ء_2 = ث \times \frac{ك ك_2}{نق_2^2} \quad (٢)$$

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{ء_1}{ء_2} = \frac{ك_1}{ك_2} \times \frac{نق_2^2}{نق_1^2}$

مثال ٨

كوكب كتلته ثلاثة أمثال كتلة الأرض وقطره ضعف قطر الأرض.
احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على هذا الكوكب وعجلة الجاذبية الأرضية.

الحل

بفرض $ء_1$ عجلة الجاذبية الأرضية ، $ك_1$ كتله الأرض ، $نق_1$ طول نصف قطرها ، $ء_2$ عجلة الجاذبية على الكوكب ، $ك_2$ كتلة الكوكب ، $نق_2$ طول نصف قطره.

$\therefore \frac{ء_2}{ء_1} = \frac{ك_2}{ك_1} \times \frac{نق_1^2}{نق_2^2}$

$\therefore ك_2 = 3 ك_1$ ، $نق_2 = 2 نق_1$

$\therefore \frac{ء_2}{ء_1} = \frac{3 ك_1}{ك_1} \times \frac{نق_1^2}{(2 نق_1)^2} = \frac{3}{4}$

مثال ٩

إذا علمت أن كتلة الأرض $5,97 \times 10^{24}$ كجم وطول نصف قطرها $6,34 \times 10^{6}$ م وكتلة القمر $7,36 \times 10^{22}$ وطول نصف قطره $1,74 \times 10^{6}$ م

فأوجد النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح القمر إلى سطح الأرض.

الحل

بفرض عجلة الجاذبية على سطح القمر $ء_1$ ، على سطح الأرض $ء_2$

$$\therefore \frac{ء_1}{ء_2} = \frac{ك_1}{ك_2} \times \frac{(نق_2)^2}{(نق_1)^2} = \frac{7,36 \times 10^{22}}{5,97 \times 10^{24}} \times \frac{(6,34 \times 10^{6})^2}{(1,74 \times 10^{6})^2}$$

$$\simeq 0,16 \simeq \frac{1}{6}$$

أى أن : عجلة الجاذبية على سطح القمر سدس مقدارها على سطح الأرض تقريبًا.

شدة مجال الجاذبية الأرضية

هى قوة جذب الأرض لكتله تساوى ١ كجم عند نقطة ما.

فمثلًا : بفرض جسم كتلته ١ كجم موضوع على ارتفاع = ع متر من سطح الأرض

فإن شدة مجال الجاذبية $= ث \times \frac{ك}{(نق + ع)^2}$

حيث ث ثابت الجذب العام ، ك كتلة الأرض بالكجم ، نق طول نصف قطر الأرض بالمتر.

مثال ١٠

إذا علمت أن كتلة الأرض $5,97 \times 10^{24}$ كجم وطول نصف قطرها $6,36 \times 10^{6}$ متر.

احسب شدة مجال الجاذبية الأرضية على ارتفاع ٥٠ كم من سطح الأرض.

الحل

بفرض جسم كتلته ١ كجم موضوع على ارتفاع ٥٠ كم = ٥٠٠٠٠ متر من سطح الأرض

فإن شدة مجال الجاذبية $= 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24}}{(6,36 \times 10^{6} + 50000)^2} \simeq 9,69$ نيوتن.

ملاحظة :

اعتبر ثابت الجذب العام لنيوتن : ث = ٦,٦٧ × ١٠^{-١١} نيوتن. م٢/كجم٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوة التجاذب بين كتلتين كل منهما ٥٠ كجم والمسافة بين مركزيهما ٥٠ سم هى .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٩,٨ (جـ) ٦,٦ × ١٠^{-١١} (د) ٦,٦٧ × ١٠^{-٦}

② كتلتان قوة الجذب بينهما ٢ نيوتن زادت المسافة بينهما إلى الضعف فإن قوة الجذب بينهما تصبح .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

③ كوكبان كتلة الأول ضعف كتلة الثانى ونصف قطر الثانى ضعف نصف قطر الأول فإن نسبة عجلة جاذبية الأول إلى عجلة جاذبية الثانى = ... : ....

(أ) ٨ : ١ (ب) ٤ : ١ (جـ) ٢ : ١ (د) ١ : ١

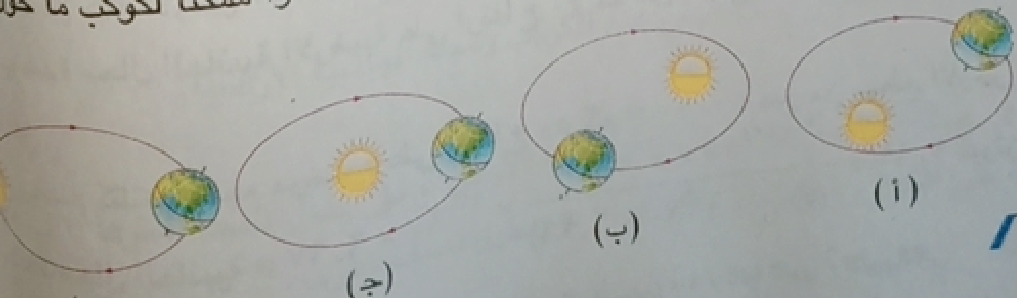
④ ماذا يحدث لوزنك كلما ابتعدت عن سطح الأرض ؟

(أ) يزداد. (ب) لا يتأثر. (جـ) يتضاعف. (د) يقل.

⑤ لا تظهر قوى التجاذب المادى بين الأجرام السماوية بوضوح وذلك : ....

(أ) لبعد المسافة بينهما. (ب) لكبر كتل هذه الأجسام.
(جـ) لقرب المسافة بينهما. (د) ب ، جـ معًا

⑥ أى من المدارات الموضحة بالشكل التالى يُعتبر مدارًا ممكنًا لكوكب ما حول الشمس ؟ ....



٧ ماذا يحدث لقوة الجذب بين جسمين عند مضاعفة المسافة بين مركزيهما ؟ ....

(أ) تصبح الضعف. (ب) تصبح أربعة أمثال.

(جـ) تصبح النصف. (د) تصبح الربع.

---

٢ كرتان كتلة الأولى ٥,٢ كجم وكتلة الثانية ٠,٢٥ كجم وضعت الكرتان بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٥٠ سم. احسب قوة التجاذب بينهما علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. $م^{٢}/كجم^{٢}$

«$٣,٤٦٨٤ \times ١٠^{-١٠}$ نيوتن»

---

٣ احسب قوة التجاذب المتبادلة بين الشمس والأرض إذا علمت أن الأرض تسير فى مدار شبه دائرى حول الشمس وأن كتلة الأرض تساوى ٦×١٠^{٢٤} كجم ، وكتلة الشمس تساوى ٢×١٠^{٢٩} كجم ، والمسافة بين مركزيهما تساوى $١,٥ \times ١٠^{١١}$ متر.

«$٣,٣٧٩ \times ١٠^{٢٢}$ نيوتن»

---

٤ إذا علمت أن كتلة الأرض ٦×١٠^{٢٤} كجم وكتلة القمر ٧×١٠^{٢٢} كجم والمسافة بين مركزيهما ٣×١٠^{٦} متر وثابت الجذب العام $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. $م^{٢}/كجم^{٢}$.

أوجد قوة جذب الأرض للقمر.

«$٣,١١ \times ١٠^{٢٤}$ نيوتن»

---

٥ أوجد قوة الجذب العام بين كوكبين كتلة الأول ٢×١٠^{٢١} طن ، وكتلة الثانى = ٤×١٠^{٢٥} طن ، والمسافة بين مركزيهما ٢×١٠^{٦} كم.

«$١,٢٣٤ \times ١٠^{٢٤}$ نيوتن»

---

٦ قمر صناعى كتلته ٤٠٠٠ كجم يدور حول الأرض فى مدار شبه دائرى على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض. فإذا كانت كتلة الأرض ٦×١٠^{٢٤} كجم وطول نصف قطرها $٦,٣٦ \times ١٠^{٦}$ متر.

أوجد قوة الجذب المتبادلة بين الأرض والقمر الصناعى.

«٣٤٦١٩ نيوتن»

---

٧ صاروخ كتلته ٨ طن انطلق من على سطح الأرض وبعد أن أصبح على بعد ١٥٠ كم من سطح الأرض فقد ربع كتلته نتيجة لاحتراق الوقود احسب وزنه حينئذ علمًا بأن كتلة الأرض $٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}$ كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم.

«٥٦٣٧٥ نيوتن»

---

٨ زادت المسافة بين مركزى كتلتين إلى الضعف فقلت قوة الجاذبية بينهما.

أوجد النسبة بين قوة الجذب قبل زيادة المسافة وبعدها.

«٤ : ١»

٩ قلّت المسافة بين مركزى كتلتين فزادت قوة الجاذبية بينهما تسعة أضعاف.
أوجد النسبة بين المسافتين. «٣ : ١»

---

١٠ وضعت كرة من الحديد على بعد ٤٠ سم من كرة أخرى من النيكل كتلتها ٥٠ كجم فكانت قوة التجاذب بينهما ١٢ × $١٠^{-٨}$ نيوتن. فكم تكون كتلة كرة الحديد إذا علمت أن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × $١٠^{-١١}$ نيوتن. م^{٢}/كجم^{٢}؟ «٥,٧٥٧ كجم»

---

١١ قمر صناعى كتلته $\frac{٣}{٢}$ طن يدور حول الأرض على ارتفاع ثابت فإذا كانت كتلة الأرض ٦ × $١٠^{٢٤}$ كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم وقوة جذب الأرض للقمر ١,٢٦ × $١٠^{٤}$ نيوتن.
أوجد ارتفاع القمر عن سطح الأرض. «٥٤٢٠ كم»

---

١٢ قمر صناعى كتلته $ك$ كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦ × $١٠^{٢٤}$ كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم.
أوجد $ك$ لأقرب كجم علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × $١٠^{-١١}$ نيوتن.م^{٢}/كجم^{٢} ، قوة جذب الأرض للقمر هى ١٧٣١٠ نيوتن. «٢٠٠٠ كجم»

---

١٣ إذا علمت أن كتلة الأرض ٥,٩٧ × $١٠^{٢٤}$ كجم وطول نصف قطرها ٦,٣٤ × $١٠^{٦}$ متر
أوجد شده جذب الأرض لجسم كتلته ١٠٠٠ كجم موضوع على سطح الأرض ومنها أوجد عجلة الجاذبية الأرضية. «٩,٩ × $١٠^{٣}$ نيوتن ، ٩,٩ م/ث^{٢}»

---

١٤ أوجد عجلة الجاذبية على سطح كوكب المشترى علمًا بأن كتلة المشترى ١,٨٩٨ × $١٠^{٢٧}$ كجم وطول نصف قطره ٦٩٩١١ كم. «٢٥,٩ م/ث^{٢}»

---

١٥ احسب عجلة الجاذبية الأرضية عند نقطة على عمق ٨٠٠٠ متر من سطح الأرض إذا علم أن كتلة الأرض ٦ × $١٠^{٢٤}$ كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم. «٩,٩١٩ م/ث^{٢}»

---

١٦ إذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية (ء) هى ١٠ م/ث^{٢} ونصف قطر الأرض يساوى ٦,٣٦ × $١٠^{٦}$ متر. احسب كتلة الأرض. «٦,٠٦ × $١٠^{٢٤}$ كجم»

---

١٧ أوجد كتلة كوكب المريخ إذا علمت أن عجلة جاذبيته ٣,٧١١ متر/ث^{٢} وطول نصف قطره ٣٣٩٠ كم. «٦,٣٩ × $١٠^{٢٣}$ كجم»

١٨ إذا علمت أن قوة الجذب المتبادلة بين الشمس والأرض هى $٣٥,٦٧ \times ١٠^{٢١}$ نيوتن وأن كتلة كل من الأرض والشمس هما $٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}$ كجم ، ١٩×١٠^{٢٩} كجم. على الترتيب أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا علم أن ثابت الجذب العام يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. م^{٢}/كجم^{٢}

($١,٤٥٦ \times ١٠^{١١}$ متر)

---

١٩ كوكبان الأول كتلته $١,٩ \times ١٠^{١٩}$ كجم وطول نصف قطره ٢٠٠٠ كم والآخر كتلته $٣,٨ \times ١٠^{١٩}$ كجم وطول نصف قطره ٣٠٠٠ كم.
أوجد النسبة بين عجلتى الجاذبية فى كل من الكوكبين.

(٨ : ٩)

---

٢٠ كوكب كتلته مساوية ثلاث مرات كتله الأرض وقطره يساوى ثلاث مرات قدر قطر الأرض.
احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح هذا الكوكب وسطح الأرض.

(٣ : ١)

---

٢١ إذا كان طول نصف قطر كل من القمر والأرض ١٦٠٠ كم ، ٦٤٠٠ كم على الترتيب ، وكانت النسبة بين عجلتى الجاذبية لكل منهما ١ : ٦
فأوجد النسبة بين كتلتيهما على الترتيب.

(١ : ٩٦)

---

٢٢ إذا كانت كتلة الأرض قدر كتلة القمر ٨١ مرة وقطراهما ١٢٧٥٦ كم ، ٣٤٧٦ كم على الترتيب فإذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية ٩,٨ م/ث^{٢}
فكم يكون تسارع الجاذبية على سطح القمر ؟

(١,٦٣ م/ث^{٢})

---

٢٣ إذا كانت كتلة المريخ تساوى ٠,١٠٧ من كتلة الأرض وطول نصف قطر الأرض ٦٤٠٠ كم وعجلة الجاذبية على سطح المريخ تساوى ٠,٣٨ من عجلة الجاذبية على سطح الأرض.
احسب طول نصف قطر المريخ.

($٣,٣٩٦١ \times ١٠^{٦}$ متر)

---

٢٤ إذا علمت أن كتلة الأرض تساوى $٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}$ كجم وطول نصف قطرها $٦,٣٤ \times ١٠^{٦}$ متر وكتلة القمر تساوى $٧,٣٦ \times ١٠^{٢٢}$ كجم
فأوجد طول نصف قطر القمر إذا كانت الجاذبية على سطح الأرض ستة أمثالها على سطح القمر.

($١,٧٢٤ \times ١٠^{٦}$ متر)

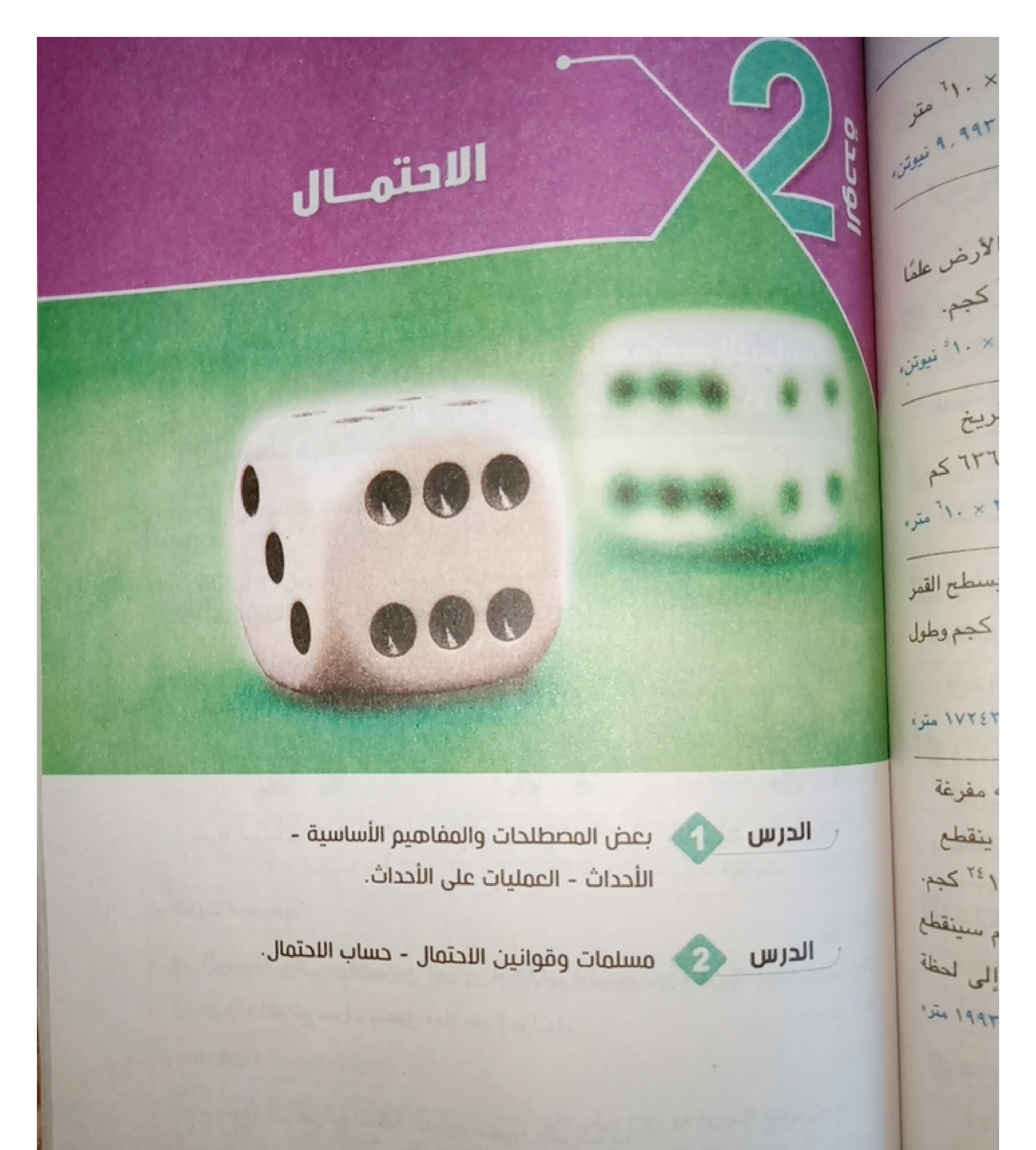
٢٥ إذا علمت أن كتلة الأرض ٦,٠٦ × ١٠^٢٤ كجم وطول نصف قطرها ٦,٣٦ × ١٠^٦ متر فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية على سطح الأرض.
«٩,٩٩٣ نيوتن»

٢٦ محطة فضائية دولية وزنها على سطح الأرض ٤٢١٩٩٧,٦ نيوتن.
أوجد وزنها عندما تكون فى المدار الخارجى على ارتفاع ٣٥٠ كم من سطح الأرض علمًا بأن طول نصف قطر الأرض يساوى ٦,٣٧ × ١٠^٣ كم وكتلتها ٥,٠٦ × ١٠^٢٤ كجم.
«٣,٧٩ × ١٠^٥ نيوتن»

٢٧ مركبة فضائية وزنها ٢١٩٦٠٠ نيوتن على سطح الأرض ووزنها على سطح المريخ ٨٣١٥٧ نيوتن فإذا كانت كتلة الأرض ٦ × ١٠^٢٤ كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم ، وكتلة المريخ ٦,٣٩ × ١٠^٢٣ أوجد طول نصف قطر كوكب المريخ.
«٣,٢٧٢ × ١٠^٦ متر»

٢٨ سقطت كرة من يد رائد فضاء من على ارتفاع ٧٣٥ سم من سطح القمر فاصطدمت بسطح القمر بعد ٣ ثوانٍ فإذا كانت كتلة القمر ٧,٣٦ × ١٠^٢٢ كجم وكتلة الأرض ٥,٩٧ × ١٠^٢٤ كجم وطول نصف قطر الأرض ٦,٣٤ × ١٠^٦ متر وعجلة جاذبية الأرض هى ٩,٨ متر/ث^٢.
أوجد طول نصف قطر القمر.
«١٧٢٤٣١٥ متر»

٢٩ إحدى شركات التنقيب عن البترول بالبحر الأبيض المتوسط قامت بدق أسطوانه مفرغة ارتفاعها ٢٠٠٠ متر ثم قامت بإنزال جسم كتلته واحد طن مربوطًا بحبل سوف ينقطع إذا بلغ الشد فيه ٩٩٠٠ نيوتن فى هذه الأسطوانة فإذا كانت كتلة الأرض ٦ × ١٠^٢٤ كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠٠٠٠ متر فهل سيصل الجسم إلى قاع الأسطوانة أم سينقطع الحبل قبلها وإن كان الحبل سينقطع فاحسب المسافة التى تدلى بها الحبل إلى لحظة انقطاعه.
«سينقطع ، ١٩٩٣,٨٣٣ متر»



الدرس 1 بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث.

الدرس 2 مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال.



الدرس 1

بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث

* لاحظ كلًا من المواقف التالية :

سلة بها ٣ كرات حمراء متماثلة	سلة بها ٣ كرات متماثلة ألوانها (حمراء - خضراء - سوداء)	سلة تحتوى على ٣ كرات متماثلة غير معروف ألوانها
أنا متأكد أن لون الكرة المسحوبة أحمر	أنا لا أعلم لون الكرة المسحوبة ولكنها إما حمراء أو خضراء أو سوداء	أنا لا أعلم لون الكرة المسحوبة ولا أستطيع أن أتنبأ حتى بالألوان الممكنة الحدوث
تجربة غير عشوائية	تجربة عشوائية	تجربة غير عشوائية

* **التجربة العشوائية :**

هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكن لا نستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يتحقق فعلاً عند إجرائها.

* **فضاء العينة (أو فضاء النواتج) :**

هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما

ويرمز له عادة بالرمز (ف) ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز ىہ (ف).

مثال ١

بيِّن أيًا من التجارب التالية عشوائية وأيها غير عشوائية ثم اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية ، مبينًا عدد عناصره :

١ إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر.

٢ إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

٣ سحب بطاقة من خمس بطاقات مرقمة من ١٠ إلى ١٤ وملاحظة العدد المكتوب على البطاقة.

٤ سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.

٥ سحب كرة من كيس يحتوى على كرة سوداء وكرة حمراء وكرة صفراء وكرة بيضاء وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

٦ اختيار عدد أولى ينحصر بين ١٥ ، ٣٢

الحل

١ التجربة عشوائية ، النواتج الممكنة لهذه التجربة هى : صورة (ص) ، كتابة (ك)

∴ ف = {ص ، ك} ، ں(ف) = ٢

٢ التجربة عشوائية ، ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ں(ف) = ٦

٣ التجربة عشوائية ، ف = {١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤} ، ں(ف) = ٥

٤ التجربة غير عشوائية.

٥ التجربة عشوائية ، ف = {أسود ، أحمر ، أصفر ، أبيض} ، ں(ف) = ٤

٦ التجربة عشوائية ، ف = {١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١} ، ں(ف) = ٥

مثال ٢

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات مبينًا عدد عناصره.

الحل

كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة : (ناتج الرمية الأولى ، ناتج الرمية الثانية)

وحيث إن النواتج الممكنة لكل من الرميتين الأولى والثانية هى : صورة (ص) أ، كتابة (ك)

∴ ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}



أى أن ف = {ص ، ك} × {ص ، ك}

، ν(ف) = $٢^{٢}$ = ٤

ويمكن التوصل إلى عناصر فضاء العينة

بواسطة الشجرة البيانية المقابلة :

لاحظ أن : (ص ، ك) ≠ (ك ، ص)

نواتج الرمية الأولى | نواتج الرمية الثانية

(ص،ص) (ص،ك) (ك،ص) (ك،ك)

ملاحظـــة :

فضاء نواتج إلقاء قطعتى نقود متمايزتين (مختلفتين فى اللون أو الشكل أو الحجم ...) معًا فى آن واحد هو نفس فضاء نواتج إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين.

ويكون كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة (وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية)

مثال ٣

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى الرميتين مبينًا عدد عناصره.

الحـــل

كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة : (ناتج الرمية الأولى ، ناتج الرمية الثانية)

∴ ف = {(س ، ص) : س ∈ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}}

أى أن ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} × {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

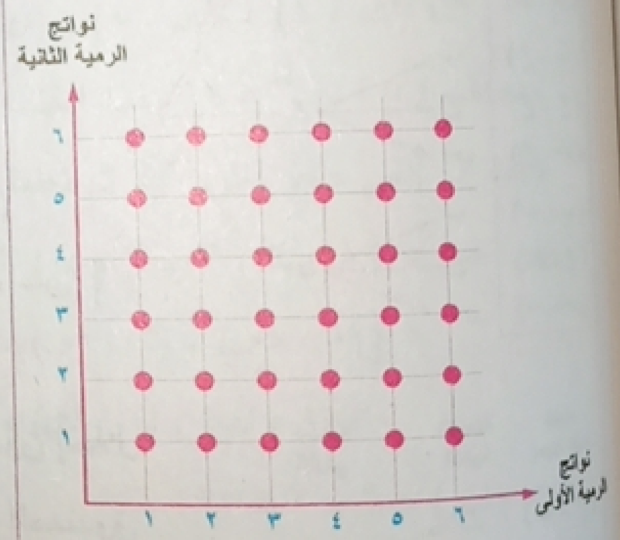
، ν(ف) = $٦^{٢}$ = ٣٦

ويمكن تمثيل فضاء العينة (ف) بالصور التالية :

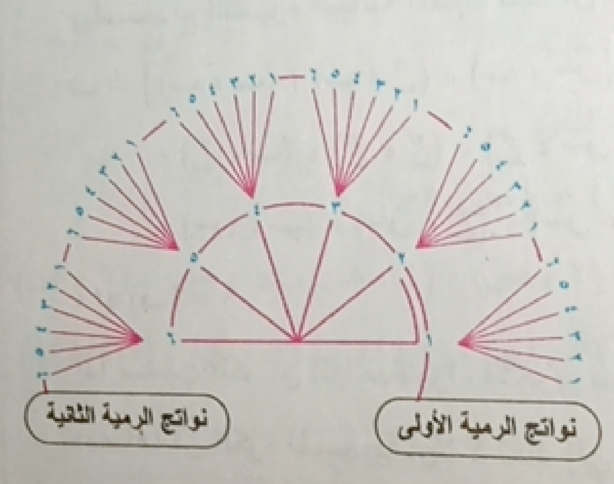
١ على صورة جدول :

نواتج الرمية الأولى \ نواتج الرمية الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

٢ هندسيًا على الشبكة البيانية :



٣ بالشجرة البيانية :



ملاحظات :

* فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين هو نفسه فضاء العينة لتجربة إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة.

* عدد عناصر فضاء العينة = $(ن)^{ر}$

حيث ن هو عدد النواتج الممكنة للرمية الواحدة ، ر هو عدد الرميات.

فمثلاً عند إلقاء حجر نرد ثلاث مرات فإن عدد عناصر فضاء العينة = $(٦)^{٣}$ = ٢١٦

مثال ٤

صندوق به ٣ كرات إحداها بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء. سحبت كرتان من الصندوق ولوحظ لونهما.

أوجد فضاء العينة مبينًا عدد عناصره فى كل من الحالات الآتية :

١ إذا سحبت الكرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال.

٢ إذا سحبت الكرتان الواحدة وراء الأخرى بدون إحلال.

٣ إذا سحبت الكرتان معًا.

الحـــل

نرمز للكرة البيضاء (ب) ، والكرة الحمراء (ح) والكرة السوداء (س)

١ إذا سحبت الكرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال

«معناها أن الكرة المسحوبة أولاً تعاد إلى الصندوق قبل السحبة الثانية».

وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {(ب ، ب) ، (ب ، ح) ، (ب ، س)

، (ح ، ب) ، (ح ، ح) ، (ح ، س)

، (س ، ب) ، (س ، ح) ، (س ، س)}

، ن(ف) = ٩

٢ إذا سحبت الكرتان الواحدة وراء الأخرى بدون إحلال

«معناها أن الكرة المسحوبة أولاً لا تعاد إلى الصندوق قبل السحبة الثانية»

وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {(ب ، ح) ، (ب ، س) ، (ح ، ب)

، (ح ، س)، (س ، ب) ، (س ، ح)}

، ن(ف) = ٦

٣ إذا سحبت الكرتان معًا [فى هذه الحالة لا يراعى ترتيب ظهور الكرتين]

ف = {ب س ، ح ب ، ح س} ، ن(ف) = ٣

مثال ٥

اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية التالية مبينًا هل هو منته أم غير منته :

١ إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين (ماذا يحدث إذا ألقى حجر النرد أولاً ثم قطعة النقود).

٢ التسديد على هدف ٤ مرات على الأكثر على أن تتوقف عن التسديد عند إصابته.

٣ التسديد على هدف ما إلى أن تتم إصابة الهدف وملاحظة عدد مرات التسديد.

الحل

١ $ف_١$ = {ص ، ك} × {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

= {(ص ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٥)

، (ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣)

، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}

، ن($ف_١$) = ٢ × ٦ = ١٢ «هذا الفضاء منته»

قطعة النقود | حجر النرد

* أما إذا ألقى حجر النرد أولاً ثم قطعة النقود

فإن : $ف_٢$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} × {ص ، ك}

= {(١ ، ص) ، (٢ ، ص) ، (٣ ، ص) ، (٤ ، ص)، (٥ ، ص) ، (٦ ، ص)

، (١ ، ك) ، (٢ ، ك) ، (٣ ، ك) ، (٤ ، ك) ، (٥ ، ك) ، (٦ ، ك)}

، ن($ف_٢$) = ٦ × ٢ = ١٢

لاحظ أن

$ف_١ \neq ف_٢$ ولكن ن($ف_١$) = ن($ف_٢$)

٢ إذا رمزنا للإصابة بالرمز (ص) ورمزنا للخطأ بالرمز (خ) وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {ص ، (خ ، ص) ، (خ ، خ ، ص)

، (خ ، خ ، خ ، ص) ، (خ ، خ ، خ ، خ)}

، ن(ف) = ٥

«هذا الفضاء منته ويسمى أيضًا بالفضاء غير المنتظم»

الرمية الأولى | الرمية الثانية | الرمية الثالثة | الرمية الرابعة

٣ ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .....} «هذا الفضاء غير منته»

ملاحظـــة :

يكون فضاء العينة منتهيًا إذا كان عدد عناصره محدودًا ويكون غير منته إذا كان عدد عناصره غير محدود وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهى.

* لاحظ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين الفرق بين :

١ ملاحظة «العددين الظاهرين على الوجه العلوى».

∴ ف١ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} × {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

= {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ... ، (٦ ، ٦)} ، ن(ف١) = ٦٢ = ٣٦

٢ ملاحظة «مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوى».

∴ ف٢ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢} ، ن(ف٢) = ١١

لاحظ أن : ف١ ≠ ف٢ ، ن(ف١) ≠ ن(ف٢)

الأحـــداث

* **الحدث :**

هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة.

* **وقوع الحدث :**

يقال إن حدثًا ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية هو أحد عناصر المجموعة التى يتألف منها هذا الحدث.

* **الحدث المؤكد (ف) :**

هو حدث لابد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

* **الحدث المستحيل (∅) :**

هو حدث لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

* **الحدث البسيط (أو الأولى) :**

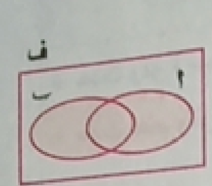
هو مجموعة جزئية من فضاء العينة (ف) تحتوى على عنصر واحد فقط.

العمليات على الأحداث

١ تقاطع حدثين (أ ∩ ب) :

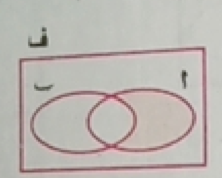
* هو حدث وقوع أ و ب معًا
* هو حدث وقوع الحدثين معًا.

٢ اتحاد حدثين (أ ∪ ب) :



* هو حدث وقوع أ أو ب أو كليهما
* هو حدث وقوع أحدهما على الأقل.

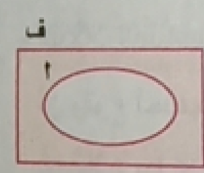
٣ الفرق بين حدثين (أ − ب) :



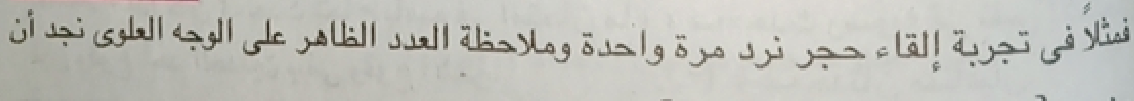
* هو حدث وقوع أ فقط
* هو حدث وقوع أ و عدم وقوع ب

أ − ب = أ ∩ بَ

٤ الحدث المكمل (أَ) :



* هو حدث عدم وقوع أ


فمثلاً في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى نجد أن :

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وإذا كان : أ حدث الحصول على عدد زوجى ، ب حدث الحصول على عدد أولى

فإن : أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {٢ ، ٣ ، ٥}

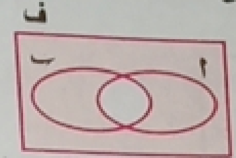
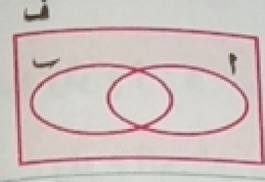
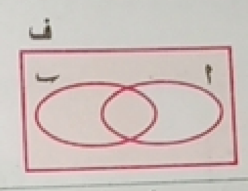
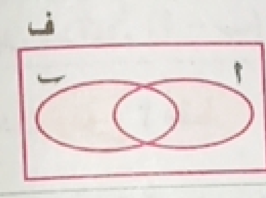
، حدث وقوع أحد الحدثين على الأقل = أ ∪ ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

، حدث وقوع الحدثين معًا = أ ∩ ب = {٢}

، حدث وقوع أ فقط = أ − ب = أ ∩ بَ = {٤ ، ٦}

، حدث عدم وقوع أ = أَ = {١ ، ٣ ، ٥}

* والجدول الآتى يوضح بعض الأحداث والتعبير اللفظى عنها وتمثيلها بشكل ڤن :

* حدث عدم وقوع الحدثين أ و ب معًا. * حدث وقوع أحدهما على الأكثر.  $(أ \cap ب)' = أ' \cup ب'$	* حدث عدم وقوع أى من الحدثين. * حدث عدم وقوع أ وعدم وقوع ب  $(أ \cup ب)' = أ' \cap ب'$
* حدث وقوع ب أو عدم وقوع أ * حدث عدم وقوع أ فقط.  $(أ - ب)' = أ' \cup ب$	* حدث وقوع أحد الحدثين دون الآخر. * حدث وقوع أحد الحدثين فقط. * حدث وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط.  $(أ - ب) \cup (ب - أ)$ $= (أ \cup ب) - (أ \cap ب)$

قانونا دى مورجان

* **الأحداث المتنافية** : يقال إن الحدثين متنافيان إذا استحال وقوعهما معًا (فى نفس الوقت) أى أن وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر.

فمثلًا : إذا كان أ «حدث نجاح باسم فى امتحان ما» ، ب «حدث رسوبه فى نفس الامتحان» فإن وقوع أحد الحدثين ينفى وقوع الآخر.
∴ أ ، ب حدثان متنافيان.

تعريف

١ يقال إن الحدثين أ ، ب من فضاء عينة ف متنافيان إذا وفقط إذا كان $أ \cap ب = \emptyset$

٢ يقال لعدة أحداث إنها متنافية إذا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

ملاحظات :

* الأحداث البسيطة (الأولية) المختلفة فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.
* الحدث أ ومكمله أ' حدثان متنافيان ويكون :

١ $أ \cap أ' = \emptyset$ (الحدث المستحيل)

٢ $أ \cup أ' =$ ف (الحدث المؤكد).

مثال ٦

فى تجربة ...
اكتب فضاء ...
وأيها مستح...
١ أ حدث ...
٢ ب حد...
٣ حـ حد...
٤ ء حدث ...
٥ هـ حد...
٦ و حدث ...

الحل

فضاء العينة ...
١ أ = {٣ ...
٣ حـ = { ...
٥ هـ = ∅

مثال ٧

فى تجربة اخ...
اكتب فضاء ال...
١ أ حدث «...
٣ حـ حدث ...
٤ ء حدث «...
٥ هـ حدث ...
٧ ك حدث ...
٨ ل حدث «...
٩ س حدث ...
١٠ ص حدث ...

مثال ٦

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى له.
اكتب فضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية مبيناً أيًا من هذه الأحداث بسيط وأيها مؤكد وأيها مستحيل :

١ أ حدث «الحصول على عدد أكبر من أو يساوى ٣»
٢ ب حدث «الحصول على عدد أصغر من ٥»
٣ حـ حدث «الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣»
٤ ء حدث «الحصول على عدد فردى غير أولى».
٥ هـ حدث «الحصول على عدد أكبر من ٢ وأصغر من ٣»
٦ و حدث «الحصول على عدد ينحصر بين ٠ ، ٧»

الحل

فضاء العينة ف = $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$

١ أ = $\{٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$
٢ ب = $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤\}$
٣ حـ = $\{٣ ، ٦\}$
٤ ء = $\{١\}$ «حدث بسيط»
٥ هـ = $\varnothing$ «حدث مستحيل»
٦ و = $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$ «حدث مؤكد»

مثال ٧

فى تجربة اختيار عدد صحيح من بين الأعداد ١ إلى ١٠
اكتب فضاء النواتج ثم عيِّن كلاً من الأحداث الآتية :

١ أ حدث «الحصول على عدد زوجى».
٢ ب حدث «الحصول على عدد أولى».
٣ حـ حدث «الحصول على عدد فردى».
٤ ء حدث «الحصول على عدد يقبل القسمة على ٤».
٥ هـ حدث «الحصول على عدد $\geq$ ٣».
٦ و حدث «الحصول على عدد مربع كامل».
٧ ك حدث «الحصول على عدد زوجى أولى».
٨ ل حدث «الحصول على عدد زوجى أو أولى».
٩ س حدث «الحصول على عدد يحقق المعادلة : $س^٢ - ٥ س = ٣٦$».
١٠ ص حدث «الحصول على عدد يحقق المتباينة : $٣ س - ١ \leq ٢٠$».

الحـــل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

١ أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

٢ ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

٣ حـ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

٤ ء = {٤ ، ٨}

٥ هـ = {١ ، ٢ ، ٣}

٦ و = {١ ، ٤ ، ٩}

٧ ك = أ ∩ ب = {٢}

٨ ل = أ ∪ ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠}

٩ س = {٩}

١٠ ص = {٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

مثال ٨

في تجربة رمى قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع ظهور الصور والكتابات اكتب فضاء العينة ف ثم عبِّر عن كل من الأحداث التالية :

١ أ حدث «الحصول على صورة في الرمية الأولى».

٢ ب حدث «الحصول على صورة فى إحدى الرميتين».

٣ حـ حدث «الحصول على صورة فى إحدى الرميتين وكتابة فى الرمية الأخرى».

٤ ء حدث «الحصول على نفس الشىء فى الرميتين».

٥ هـ حدث «الحصول على صورة فى الرميتين».

٦ و حدث «الحصول على صورة على الأكثر فى الرميتين».

الحـــل

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

١ أ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)}

٢ ب = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص)}

٣ حـ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص)}

٤ ء = {(ص ، ص) ، (ك ، ك)}

٥ هـ = {(ص ، ص)}

٦ و = {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

مثال ٩

من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} كون عدد من رقمين مختلفين.

اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ثم أوجد كلًا من الأحداث الآتية :

١ أ حدث «مجموع الرقمين = ٧»

٢ ب حدث «مجموع الرقمين عدد زوجى».

٣ حـ حدث «مجموع الرقمين عدد أولى».

٤ ء حدث «العدد الناتج يقبل القسمة على ٣».

٥ هـ حدث «رقم الآحاد زوجى».

٦ و حدث «رقم العشرات أولى».

ثم أوجد كلاً من : أ ∪ ب ، ب ∩ ء ، هـ − ب ، أَ ∩ بَ

الحل

باستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤}

١ أ = {٤٣ ، ٣٤}

٢ ب = {٣١ ، ١٣ ، ٤٢ ، ٢٤}

٣ حـ = {٢١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٣٤}

٤ ء = {٢١ ، ١٢ ، ٤٢ ، ٢٤}

٥ هـ = {١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤}

٦ و = {٢١ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٣٤}

رقم الآحاد | رقم العشرات

١ ← ٢ ، ٣ ، ٤
٢ ← ١ ، ٣ ، ٤
٣ ← ١ ، ٢ ، ٤
٤ ← ١ ، ٢ ، ٣

أ ∪ ب = {٤٣ ، ٣٤ ، ٣١ ، ١٣ ، ٤٢ ، ٢٤}

، ب ∩ ء = {٤٢ ، ٢٤} ، هـ − ب = {١٢ ، ٣٢ ، ١٤ ، ٣٤}

، أَ ∩ بَ = (أ ∪ ب)َ = {٢١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٢٣ ، ١٤}

مثال ١٠

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى الرميتين ارسم شكلاً هندسيًا لفضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية موضحًا إياها على الشكل الهندسى لفضاء العينة :

١ أ حدث «الحصول على عددين مجموعهما فردى وأكبر من ٦».

أو يساوي ٥».

٢ ب حدث «الحصول على عددين أحدهما ٢ ومجموعهما أصغر من أو يساوي ٥».

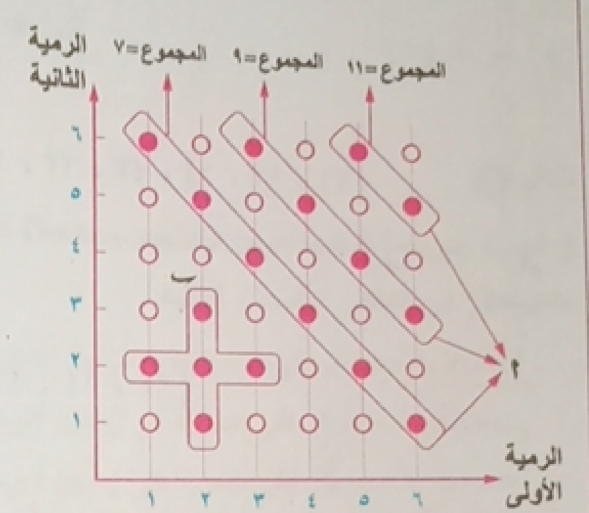
٣ حـ حدث «الحصول على عددين الفرق المطلق بينهما يساوي ٢».

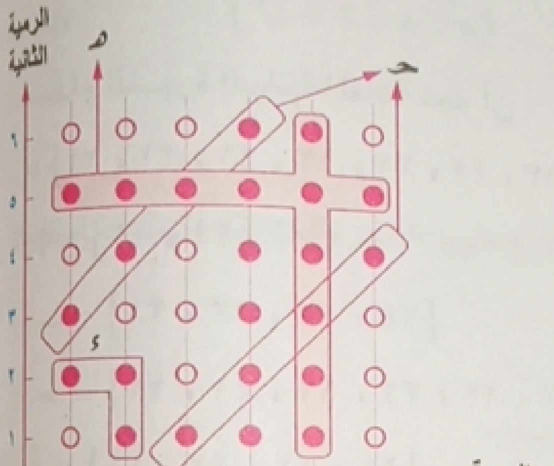
٤ ء حدث «الحصول على عددين أكبرهما هو العدد ٢».

٥ هـ حدث «الحصول على العدد ٥ مرة واحدة على الأقل».

بيِّن هل الأحداث أ ، ب ، ء متنافية أم لا.

الحل





١ أ = {(٦ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٦) ، (٦ ، ٣) ،
، (٥ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٥ ، ٦)}

٢ ب = {(٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (١ ، ٢)}

٣ حـ = {(٣ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣)
، (٦ ، ٤) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)
، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦)}

٤ ء = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

للاحظ أنه :

إذا كان الفرق المطلق بين عددين = ٢
فإن العددين يمكن أن يكونا (٥ ، ٣)
أو (٣ ، ٥) ، ...
لأن : |٥ - ٣| = |٣ - ٥| = ٢

٥ هـ = {(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٥)}

∵ أ ∩ ب = ∅ ∴ الحدثان أ ، ب متنافيان

، ∵ أ ∩ ء = ∅ ∴ الحدثان أ ، ء متنافيان

، ∵ ب ∩ ء ≠ ∅ ∴ الأحداث أ ، ب ، ء غير متنافية

مثال ١١

ألقيت قطعة نقود مرة واحدة. فإذا كان الوجه الظاهر يحمل كتابة فسوف يلقى حجر نرد مرة واحدة أما إذا كان يحمل صورة فسوف تلقى قطعة النقود مرة ثانية.

اكتب فضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

١ أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجي».

٢ ب حدث «ظهور صورة أو عدد أولي».

٣ حـ حدث «ظهور كتابة على الأقل».

٤ ء حدث «ظهور كتابة وعدد مربع كامل».

٥ هـ حدث «ظهور صورة أو عدد أصغر من ٣».

٦ و حدث «عدم وقوع حـ».

٧ ن حدث «وقوع أ وعدم وقوع ء».

٨ ع حدث «وقوع أ ، هـ معًا».

الحل

باستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

الرمية الأولى	الرمية الثانية	فضاء العينة (ف)
ص	ص	(ص ، ص)
	ك	(ص ، ك)
ك	١	(ك ، ١)
	٢	(ك ، ٢)
	٣	(ك ، ٣)
	٤	(ك ، ٤)
	٥	(ك ، ٥)
	٦	(ك ، ٦)

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}

١ أ = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

٢ ب = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٥)}

٣ حـ = {(ص ، ك) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}

٤ ء = {(ك ، ١) ، (ك ، ٤)}

٥ هـ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢)}

٦ و = حَ = {(ص ، ص)}

٧ ن = أ − ء = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٦)}

٨ ع = أ ∩ هـ = {(ك ، ٢)}

على بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث

١ اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية الآتية ، مبينًا عدد عناصره :

(١) سحب بطاقة من بين أربع بطاقات مرقمة بالأرقام من ٢ إلى ٥ وملاحظة الرقم المكتوب على البطاقة.

(٢) اختيار أحد أرقام العدد ٢٦٣٤٥

(٣) اختيار عدد أولى ينحصر بين ١٠ ، ٢٠

(٤) اشتراك الأهلى والزمالك والإسماعيلى فى دورة ثلاثية وملاحظة :

أولًا : الفائز بها. ثانيًا : ترتيب الفرق الثلاثة.

(٥) إلقاء ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة وملاحظة تتابع ظهور الصور والكتابات.

(٦) الحصول على عدد مكون من رقمين مختلفين من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

(٧) الحصول على عدد مكون من رقمين من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢

(٨) كيس به ٤ كرات واحدة حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء والرابعة صفراء ، والتجربة هى سحب كرتين واحدة بعد الأخرى وملاحظة لونهما :

أولًا : مع الإحلال (إرجاع الكرة الأولى قبل سحب الثانية). ثانيًا : بدون إحلال.

(٩) التسديد على هدف ٣ مرات على الأكثر بحيث نتوقف عن التسديد عند إصابته.

(١٠) إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإذا ظهر عدد أقل من ٦ تُلقى قطعة نقود مرة واحدة ، وإذا ظهر العدد ٦ تُلقى قطعة نقود مرتين متتاليتين.

(١١) إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد فيه وجهان يحملان الرقم ١ ، ووجهان يحملان الرقم ٢ ، ووجهان يحملان الرقم ٣ ، وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

(١٢) صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سُحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الثانية وملاحظة حاصل ضرب العددين المكتوبين على الكرتين.

(١٣) إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة عدد الصور.

٢ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى اكتب فضاء العينة ف ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية ، مبينًا أى هذه الأحداث بسيط وأيها مؤكد وأيها مستحيل :

(١) أ حدث «ظهور الرقم ٤».
(٢) ب حدث «عدم ظهور الرقم ٥».
(٣) حـ حدث «ظهور عدد أكبر من ٣».
(٤) ء حدث «ظهور عدد أصغر من ٨».
(٥) هـ حدث «ظهور عدد يقبل القسمة على ٧».
(٦) و حدث «ظهور عدد أولى».
(٧) ك حدث «ظهور عدد فردى أولى».
(٨) ل حدث «ظهور عدد زوجى أو أولى».
(٩) م حدث «ظهور عدد ليس مربعًا كاملاً».
(١٠) س حدث «ظهور عدد يحقق المعادلة : س (س − ٢) = ١٥».
(١١) ص حدث «ظهور عدد يحقق المتباينة : س ≥ ٤».

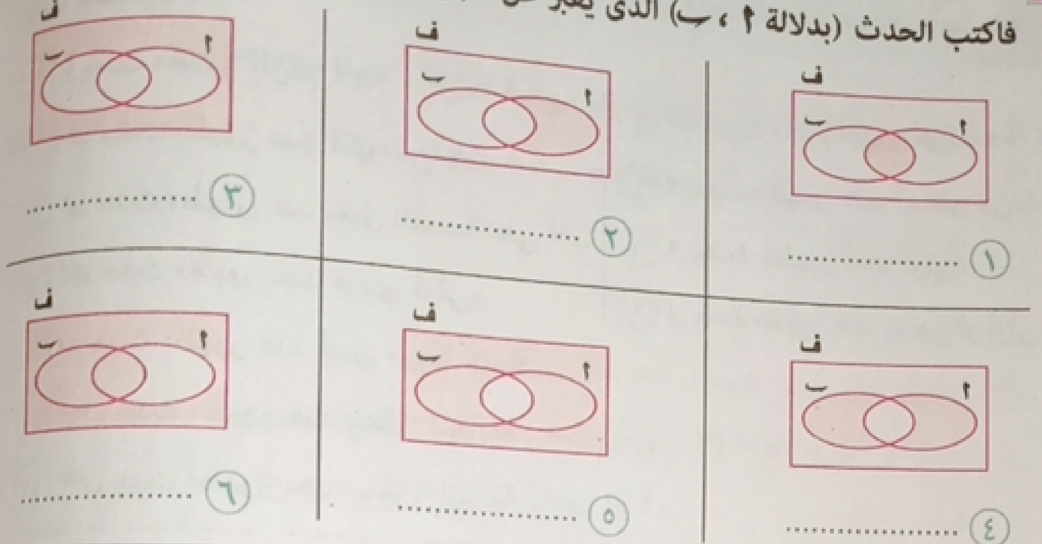
٣ حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة ، **اكتب الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠».
(٢) ب حدث «العدد المسجل عامل من عوامل ١٢».
(٣) حـ حدث «العدد المسجل فردى ويقبل القسمة على ٣».
(٤) ء حدث «العدد المسجل مضاعف للعددين ٢ ، ٥».
(٥) هـ حدث «العدد المسجل أولى».
(٦) و حدث «العدد المسجل يحقق المتباينة : ٥ س − ٣ ≥ ١٧».

٤ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى ، اكتب فضاء العينة (ف) **ثم عيِّن كلًا من الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «ظهور عدد فردى».
(٢) ب حدث «ظهور عدد أولى».
(٣) حدث وقوع أ و ب معًا.
(٤) حدث وقوع أحدهما على الأقل.
(٥) حدث عدم وقوع أ
(٦) حدث وقوع أ فقط.
(٧) حدث وقوع ب فقط.
(٨) حدث وقوع أحدهما فقط.
(٩) حدث وقوع أحدهما على الأكثر.

٥ فى كل من الأشكال التالية إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان أ ، ب حدثين من ف فاكتب الحدث (بدلالة أ ، ب) الذى يعبر عن الجزء المظلل بشكل ڤن :



٦ فى تجربة رمى قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات اكتب فضاء العينة ف ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «الحصول على كتابة فى الرمية الأولى».

(٢) ب حدث «الحصول على كتابة فى إحدى الرميتين فقط».

(٣) حـ حدث «الحصول على صورة فى الرمية الأولى أو كتابة فى الرمية الثانية».

(٤) ء حدث «عدم ظهور صورة».

(٥) هـ حدث «ظهور نفس الشىء فى الرميتين».

(٦) و حدث «ظهور شىء مختلف فى الرميتين».

٧ ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ولوحظ تتابع الصور والكتابات ، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ثم عيِّن الأحداث التالية :

(١) أ حدث «ظهور صورة واحدة بالضبط».

(٢) ب حدث «ظهور صورة على الأقل».

(٣) حـ حدث «ظهور صورة على الأكثر».

(٤) ء حدث «ظهور صورتين بالضبط».

(٥) هـ حدث «ظهور أكثر من صورتين».

ثم وضح أيًا من هذه الأحداث يكون حدثًا أوليًا (بسيطًا).

٨ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات وتوقفت التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات
اكتب فضاء النواتج ثم عيِّن الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور صورة على الأكثر». (٢) ب حدث «ظهور صورة على الأقل».
(٣) حـ حدث «ظهور كتابتين على الأقل». (٤) ء حدث «ظهور صورتين على الأقل».

٩ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين.
اكتب فضاء النواتج ثم عيِّن الأحداث الآتية :

(١) أ «حدث ظهور صورة على الأقل». (٢) ب «حدث ظهور كتابتين على الأكثر».
(٣) حـ «حدث ظهور كتابة على الأكثر».

١٠ من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} كوِّن عددًا من رقمين مختلفين.
مثِّل فضاء النواتج ف بشكل شجرة ، ثم اكتب ف وعيِّن منها الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «أن يكون رقم الآحاد فرديًا».
(٢) ب حدث «أن يكون رقم العشرات فرديًا».
(٣) حـ حدث «أن يكون كلا الرقمين فرديًا».
(٤) ء حدث «أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًا».
(٥) هـ حدث «مجموعة الأعداد التى بها الآحاد ضعف العشرات».

١١ حقيبة بها ٣ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء. سحبت منها عشوائيًا ٣ كرات الواحدة بعد الأخرى بدون إحلال. **اكتب فضاء العينة ثم اكتب الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأقل».
(٢) ب حدث «الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر».
(٣) حـ حدث «الحصول على كرتين بالضبط من لون واحد».
(٤) أ ∩ ب (٥) ب ∩ حـ (٦) حـ - أ

١٢ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولًا قبل سحب البطاقة الثانية ، **ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ وإذا كان :**

(١) أ حدث «العدد في السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد فى السحبة الأولى».
(٢) ب حدث «مجموع العددين أكبر من ١٣».

اكتب كلًا من أ ، ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.

١٣ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة
ارسم شكلاً هندسيًا لفضاء العينة ف ووضح عليه كلاً من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور العدد ٣ فى الرمية الأولى».
(٢) ب حدث «ظهور العدد ٣ فى الرمية الثانية».
(٣) حـ حدث «ظهور العدد ٣ فى أى من الرميتين».
(٤) ء حدث «ظهور عدد فى الرمية الأولى يزيد ٢ عن العدد فى الرمية الثانية».
(٥) هـ حدث «ظهور عدد فى الرمية الثانية يزيد ١ عن العدد فى الرمية الأولى».

١٤ ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة.
عيِّن كلًا من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «مجموع العددين ٨».
(٢) ب حدث «مجموع العددين ١٠».
(٣) حـ حدث «المجموع ٨ أو ١٠».
(٤) ء حدث «المجموع ١٥».
(٥) هـ حدث «ظهور عددين متساويين».

١٥ فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين
اكتب كلًا من الأحداث الآتية :

(١) $أ_١$ حدث «الفرق المطلق بين العددين الظاهرين = ٣».
(٢) $أ_٢$ حدث «مجموع العددين الظاهرين يساوى ١٠ على الأقل».
(٣) $أ_٣$ حدث «أصغر العددين الظاهرين = ٤».
(٤) $أ_٢ \cap أ_٣$
(٥) $أ_١ \cap أ_٢$
(٦) $أ_٤$ حدث «أكبر العددين الظاهرين $\geq$ ٣».
(٧) $أ_٥$ حدث «أكبر العددين الظاهرين $\leq$ ٥».

وضح كلاً من $أ_٤$ ، $أ_٥$ على الشكل الهندسى لفضاء العينة ف

١٦ ألقيت قطعة نقود معدنية ثم حجر نرد لملاحظة وجه قطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد.
اكتب فضاء النواتج ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

(١) $أ_١$ حدث «ظهور كتابة وعدد فردى».
(٢) $أ_٢$ حدث «ظهور صورة وعدد زوجى».
(٣) $أ_٣$ حدث «ظهور عدد أولى».
(٤) $أ_٤$ حدث «العدد الظاهر أكبر من ٢».

١٧ ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ولوحظ الوجه العلوى لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد ،

مثّل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجى».

(٢) ب حدث «ظهور صورة وعدد فردى».

(٣) حـ حدث «وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب».

(٤) ء حدث «وقوع الحدث أ فقط».

(٥) هـ حدث «عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب».

---

١٨ عند إلقاء قطعة نقود إذا كان الناتج صورة فسوف تلقى قطعة النقود مرة ثانية وتتوقف التجربة ، أما إذا كان الناتج كتابة فى المرة الأولى فسوف يلقى حجر نرد مرة واحدة.

اكتب فضاء العينة لتلك التجربة ثم اكتب كلًا من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجى».

(٢) ب حدث «ظهور صورة واحدة على الأقل».

(٣) حـ حدث «ظهور كتابة وعدد أولى».

---

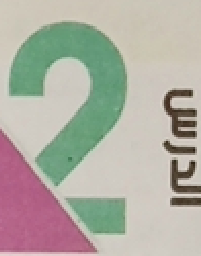
١٩ ألقى حجر نرد فإذا حدث وكان العدد الظاهر على الوجه العلوى للحجر عددًا زوجيًا فسوف تلقى قطعة نقود مرة واحدة أما إذا كان العدد الظاهر فرديًا فإن قطعة النقود سوف تلقى مرتين.

اكتب فضاء العينة لتلك التجربة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور عدد فردى وصورة واحدة على الأقل».

(٢) ب حدث «ظهور عدد زوجى وكتابة».





الدرس 2

مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال

إذا كان لدينا فضاء عينة لتجربة عشوائية ما (ف) فإنه يمكننا تعريف مجموعة من الأحداث على هذا الفضاء ، ونستطيع أن نعبر عن مدى إمكانية وقوع أى حدث منها بصورة عددية بما يسمى احتمال الحدث ، وهو يحقق المسلمات الثلاث الآتية :

مسلمات الاحتمال

١ لكل حدث أ ⊂ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ ويرمز له بالرمز ل (أ) حيث :

صفر ≤ ل (أ) ≤ ١

أى أن ل (أ) ∈ [٠ ، ١]

٢ ل (ف) = ١ أى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

٣ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

ويمكن تعميم هذه القاعدة لعدة أحداث متنافية (مثنى مثنى) $أ_1$ ، $أ_2$ ، .... $أ_ن$ فيكون :

ل ($أ_1$ ∪ $أ_2$ ∪ .... ∪ $أ_ن$) = ل ($أ_1$) + ل ($أ_2$) + ... + ل ($أ_ن$)

نتائج هامة

١ ل (∅) = صفر

أى أن احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر

٢ ل (أَ) = ١ − ل (أ) حيث أَ هو الحدث المكمل للحدث أ

٣ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

حيث أ ، ب أى حدثين من فضاء العينة ف (ليسا بالضرورة حدثين متنافيين)

٤ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

٥ إذا كان : أ ⊂ ب فإن : ل (أ) ≤ ل (ب) حيث أ ، ب حدثان من نفس فضاء العينة.

الجدول الآتى يلخص لنا احتمالات بعض الأحداث ، كما يوضح التعبير اللفظى عنها وتمثيلها بشكل ڤن :

احتمال الحدث	التعبير عنه لفظيًا	تمثيل الحدث بشكل ڤن
ل (ف)	* احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١	ف
ل (∅)	* احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	ف
ل (أ)	* احتمال وقوع الحدث أ	ف أ
ل (أَ) = ل (ف − أ)	* احتمال الحدث المكمل للحدث أ * احتمال عدم وقوع الحدث أ	ف أ
ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أ ، ب معًا.	ف أ ب
ل (أ ∪ ب)	* احتمال وقوع أ أو ب أو كليهما. * احتمال وقوع أحدهما على الأقل. * احتمال وقوع أى من الحدثين.	ف أ ب

القانون	المعنى
ل (أ − ب) = ل (أ ∩ بَ)	* احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب * احتمال وقوع أ فقط.
ل (أَ ∪ بَ) = ل (أ ∩ ب)َ	* احتمال عدم وقوع الحدثين معًا. * احتمال وقوع أحدهما على الأكثر.
ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ	* احتمال عدم وقوع أى من الحدثين. * احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب
ل (أَ ∪ ب) = ل (أ − ب)َ	* احتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ * احتمال عدم وقوع أ فقط.
ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر. * احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

حساب الاحتمال

إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات ، فإن احتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف يعطى بالقانون :

ل (أ) = عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ ÷ عدد جميع النواتج الممكنة

أى أن ل (أ) = عدد عناصر أ ÷ عدد عناصر ف = ن(أ) ÷ ن(ف)

فمثلًا :

إذا كان لدينا صندوق به ٢٤ تفاحة منها ٤ تفاحات تالفة وسحبنا من الصندوق تفاحة واحدة بطريقة عشوائية ، فإن احتمال أن تكون التفاحة المسحوبة تالفة = عدد التفاحات التالفة ÷ عدد التفاحات فى الصندوق

∴ ل (التفاحة المسحوبة تالفة) = ٤ ÷ ٢٤ = ١ ÷ ٦

ملاحظــات :

١ فى أى تجربة عشوائية تعتمد على إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود فإننا نعتبر أن حجر النرد أو قطعة النقود منتظمة تمامًا ما لم ينص على خلاف ذلك.

٢ فى أى تجربة عشوائية تعتمد على اختيار عنصر من مجموعة بها عدد محدود من العناصر فإننا نعتبر أن الاختيار يتم بطريقة عشوائية أى أن جميع عناصر فضاء العينة ف يكون لها قيم احتمالية متساوية (نفس فرص الحدوث).

ملاحظات هامة عند حل المسائل

١ إذا كان أ $\subset$ ب فإن :

* ل (أ $\cap$ ب) = ل (أ)
* ل (أ $\cup$ ب) = ل (ب)
* ل (أ − ب) = ل ($\emptyset$) = صفر
* ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ)

ف ب أ

٢ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن :

* ل (أ $\cap$ ب) = صفر
* ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب)
* ل (أ − ب) = ل (أ)
* ل (ب − أ) = ل (ب)

ف أ ب

٣ إذا كان ل (أ) = ل (أَ) فإن ل (أ) = $\frac{1}{2}$

وبصفة عامة : إذا كان $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أَ)}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$

$\therefore$ ل (أ) = $\frac{\text{م}}{\text{م} + \text{ن}}$

٤ قانونا «دى مورجان» :

أَ $\cup$ بَ = (أ $\cap$ ب)َ ، أَ $\cap$ بَ = (أ $\cup$ ب)َ

ولذلك نجد أن :

* ل (أَ $\cup$ بَ) = ل (أ $\cap$ ب)َ = ١ − ل (أ $\cap$ ب)
* ل (أَ $\cap$ بَ) = ل (أ $\cup$ ب)َ = ١ − ل (أ $\cup$ ب)

٥ **لاحظ الفرق بين التعبيرات الآتية :**

* احتمال عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب $\Leftarrow$ ل (أَ $\cup$ بَ)
* احتمال عدم وقوع أ أو وقوع ب $\Leftarrow$ ل (أَ $\cup$ ب)
* احتمال عدم وقوع (أ أو ب) $\Leftarrow$ ل (أ $\cup$ ب)َ «باقى التعبيرات اللفظية راجع الجدول السابق»

٦ $أ - ب = أ \cap بَ = بَ \cap أ = بَ - أَ$

ولذلك نجد أن :

* ل $(أ \cap بَ)$ = ل $(أ - ب)$ = ل $(أ)$ − ل $(أ \cap ب)$
* ل $(بَ - أَ)$ = ل $(أ - ب)$ = ل $(أ)$ − ل $(أ \cap ب)$
* ل $(أَ \cup ب)$ = ل $(أ \cap بَ)َ$ = ل $(أ - ب)َ$ = ١ − ل $(أ - ب)$

٧ من الشكل المقابل نجد أن :

* ل $(أ - ب)$ + ل $(ب - أ)$ = ل $(أ \cup ب)$ − ل $(أ \cap ب)$
= ل $(أ)$ + ل $(ب)$ − ل $(أ \cap ب)$ − ل $(أ \cap ب)$
= ل $(أ)$ + ل $(ب)$ − ٢ ل $(أ \cap ب)$
* ل $(أ \cup ب)$ = ل $(أ)$ + ل $(ب - أ)$ = ل $(أ)$ + ل $(ب \cap أَ)$

٨ * ل $(أ - بَ)$ = ل $(أ \cap ب)$

* ل $(أَ - ب)$ = ل $(أَ \cap بَ)$
= ل $(أ \cup ب)َ$ = ١ − ل $(أ \cup ب)$

٩ يمكنك دائمًا حل مسائل الاحتمالات باستخدام أشكال ﭬن بجانب القوانين والجدول السابقين.

مثال ١

إذا كان س ، ص حدثين من فضاء عينة ف وكان : ل (س) = ٠,٣٥ ، ل (ص) = ٠,٤٨ ، ل (س $\cup$ ص) = ٠,٦

فأوجد : ١ ل (سَ) ، ل (صَ) ٢ ل (س $\cap$ ص) ٣ ل (س $\cap$ صَ)

٤ ل (سَ $\cap$ صَ) ٥ ل (سَ $\cup$ صَ)

الحل

١ ل(سَ) = ١ − ل(س) = ١ − ٠,٣٥ = ٠,٦٥

، ل(صَ) = ١ − ل(ص) = ١ − ٠,٤٨ = ٠,٥٢

٢ ∵ ل(س ∪ ص) = ل(س) + ل(ص) − ل(س ∩ ص)

∴ ٠,٦ = ٠,٣٥ + ٠,٤٨ − ل(س ∩ ص)

∴ ل(س ∩ ص) = ٠,٣٥ + ٠,٤٨ − ٠,٦ = ٠,٢٣

٣ ل(س ∩ صَ) = ل(س − ص) = ل(س) − ل(س ∩ ص)

= ٠,٣٥ − ٠,٢٣ = ٠,١٢

٤ ل(سَ ∩ صَ) = ل(س ∪ ص)َ = ١ − ل(س ∪ ص) = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

٥ ل(سَ ∪ صَ) = ل(س ∩ ص)َ = ١ − ل(س ∩ ص) = ١ − ٠,٢٣ = ٠,٧٧

مثال ٢

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ) = ل(أَ)

، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$ ، ل(ب) = $\frac{٥}{٨}$ ل(أ)

أوجد:

١ ل(ب)

٢ ل(أ ∪ ب)

٣ ل(أ − ب)

٤ ل(ب ∪ أَ)

٥ ل(أَ ∪ بَ)

الحل

∵ ل(أ) = ل(أَ) ∴ ل(أ) = $\frac{١}{٢}$

١ ل(ب) = $\frac{٥}{٨}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$

٢ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥}{١٦}$ − $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

٣ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{٧}{١٦}$

٤ ل(ب ∪ أَ) = ل(أ − ب)َ = ١ − ل(أ − ب) = ١ − $\frac{٧}{١٦}$ = $\frac{٩}{١٦}$

٥ ل(أَ ∪ بَ)َ = ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$

مثال ٣

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (ب) = ١/٣ ، ل (أ ∩ بَ) = ١/٤

أوجد قيمة ل (أ) إذا كان :

١ أ ، ب حدثين متنافيين. ٢ ب ⊂ أ ٣ ل (أ ∩ ب) = ١/١٢

الحل

∵ ل (أ ∩ بَ) = ١/٤ ∴ ل (أ − ب) = ١/٤ ∴ ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ١/٤

١ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر ∴ ل (أ) = ١/٤

٢ ∵ ب ⊂ أ ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (ب)

∴ ل (أ) − ل (ب) = ١/٤ ∴ ل (أ) − ١/٣ = ١/٤ ∴ ل (أ) = ١/٤ + ١/٣ = ٧/١٢

٣ ∵ ل (أ ∩ ب) = ١/١٢ ∴ ل (أ) − ١/١٢ = ١/٤ ∴ ل (أ) = ١/٤ + ١/١٢ = ١/٣

مثال ٤

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤

أوجد :

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.
٣ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ
٤ احتمال عدم وقوع الحدث أ
٥ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين.
٦ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

الحل

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٧

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

٣ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ = ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٢

٤ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

٥ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين = ل $(أ \cup ب)'$ = ١ − ل $(أ \cup ب)$ = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

٦ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر = ل $(أ \cup ب)$ − ل $(أ \cap ب)$

= ٠,٧ − ٠,٤ = ٠,٣

مثال ٥

ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ $أ_١$ حدث «الحصول على العدد ٣».

٢ $أ_٢$ حدث «الحصول على عدد أكبر من ٤».

٣ $أ_٣$ حدث «الحصول على عدد زوجى».

٤ $أ_٤$ حدث «الحصول على عدد أولى».

٥ $أ_٥$ حدث «الحصول على عدد زوجى وأولى».

٦ $أ_٦$ حدث «الحصول على عدد زوجى أو أولى».

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ن(ف) = ٦

١ $أ_١$ = {٣} ∴ ل $(أ_١) = \frac{١}{٦}$

٢ $أ_٢$ = {٥ ، ٦} ∴ ل $(أ_٢) = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

٣ $أ_٣$ = {٢ ، ٤ ، ٦} ∴ ل $(أ_٣) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

٤ $أ_٤$ = {٢ ، ٣ ، ٥} ∴ ل $(أ_٤) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

٥ $أ_٥ = أ_٣ \cap أ_٤$ = {٢} ∴ ل $(أ_٥) = \frac{١}{٦}$

٦ $أ_٦ = أ_٣ \cup أ_٤$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ل $(أ_٦) = \frac{٥}{٦}$

أ، ل $(أ_٦)$ = ل $(أ_٣ \cup أ_٤)$ = ل $(أ_٣)$ + ل $(أ_٤)$ − ل $(أ_٣ \cap أ_٤)$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$

مثال ٦

ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ $أ_١$ حدث «الحصول على صورة فى كل من الرميتين».

٢ $أ_٢$ حدث «الحصول على كتابة واحدة على الأكثر».

٣ $أ_٣$ حدث «الحصول على كتابة واحدة على الأقل».

٤ $أ_٤$ حدث «الحصول على صورة واحدة فقط».

الحـــل

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} ∴ ن(ف) = ٤

١ $أ_١$ = {(ص ، ص)} ∴ ل $(أ_١) = \frac{١}{٤}$

٢ $أ_٢$ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص)} ∴ ل $(أ_٢) = \frac{٣}{٤}$

٣ $أ_٣$ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} ∴ ل $(أ_٣) = \frac{٣}{٤}$

٤ $أ_٤$ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص)} ∴ ل $(أ_٤) = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

مثال ٧

سحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٣٠ بطاقة مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٣٠

أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ $أ_١$ البطاقة المسحوبة تحمل عددًا يقبل القسمة على ٥

٢ $أ_٢$ البطاقة المسحوبة تحمل عددًا يقبل القسمة على ٧

٣ $أ_٣$ البطاقة المسحوبة تحمل عددًا يقبل القسمة على ٥ ، ٧

٤ $أ_٤$ البطاقة المسحوبة تحمل عددًا يقبل القسمة على ٥ أ، ٧

٥ $أ_٥$ البطاقة المسحوبة تحمل عددًا مربعًا كاملاً.

الحـــل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٣٠} ∴ ن(ف) = ٣٠

١ $أ_١$ = {٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠} ∴ ل $(أ_١) = \frac{٦}{٣٠} = \frac{١}{٥}$

٢ $أ_٢$ = {٧ ، ١٤ ، ٢١ ، ٢٨} ∴ ل $(أ_٢) = \frac{٤}{٣٠} = \frac{٢}{١٥}$

٣ $أ_٣ = أ_١ \cap أ_٢ = \varnothing$ (أى أن $أ_١$ ، $أ_٢$ حدثان متنافيان). ∴ ل $(أ_٣)$ = صفر

٤ $أ_٤ = أ_١ \cup أ_٢$ = {٥ ، ٧ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠}

∴ ل $(أ_٤) = \frac{١٠}{٣٠} = \frac{١}{٣}$ أ، ل $(أ_٤)$ = ل $(أ_١)$ + ل $(أ_٢)$ $= \frac{١}{٥} + \frac{٢}{١٥} = \frac{١}{٣}$

٥ $أ_٥$ = {١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥} ∴ ل $(أ_٥) = \frac{٥}{٣٠} = \frac{١}{٦}$

مثال ٨

كيس يحتوى على ٩ كرات متماثلة «٤ بيضاء ، ٣ حمراء ، ٢ سوداء».

سحبت كرة عشوائيًا من الكيس. احسب احتمالات الأحداث الآتية :

١ $أ_١$ حدث «الكرة المسحوبة بيضاء». ٢ $أ_٢$ حدث «الكرة المسحوبة حمراء».

٣ $أ_٣$ حدث «الكرة المسحوبة سوداء». ٤ $أ_٤$ حدث «الكرة المسحوبة بيضاء أو سوداء».

٥ $أ_٥$ حدث «الكرة المسحوبة ليست سوداء».

٦ $أ_٦$ حدث «الكرة المسحوبة بيضاء أو حمراء أو سوداء».

الحل

حيث إن السحب يتم عشوائيًا لذلك فإن الكرات التسع فى الكيس تكون لها نفس القيم الاحتمالية وعلى ذلك فإن :

١ $ل(أ_١) = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{٤}{٩}$

٢ $ل(أ_٢) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

٣ $ل(أ_٣) = \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{٢}{٩}$

٤ $ل(أ_٤) = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء والسوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{٤ + ٢}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

٥ $ل(أ_٥) = \frac{\text{عدد الكرات غير السوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{٤ + ٣}{٩} = \frac{٧}{٩}$

لاحظ أن

$أ_٥$ هو الحدث المكمل للحدث $أ_٣$ $\therefore$ $ل(أ_٥) = ١ - ل(أ_٣) = ١ - \frac{٢}{٩} = \frac{٧}{٩}$

٦ $ل(أ_٦) = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء والحمراء والسوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{٩}{٩} = ١$

مثال ٩

يوجه صيادان نيرانهما إلى ثعلب ، فإذا كان احتمال أن يصيب الأول الثعلب هو $\frac{١}{٢}$ واحتمال أن يصيب الثانى الثعلب هو $\frac{٢}{٣}$ واحتمال أن يصيب الاثنان معًا الثعلب هو $\frac{١}{٣}$ فأوجد :

١ احتمال إصابة الثعلب.

٢ احتمال عدم إصابة الثعلب.

٣ احتمال أن يصيب الصياد الأول وحده الثعلب.

... الصياد الثانى فقط.

٤ احتمال إصابة الثعلب من الصياد الثانى فقط.

٥ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما فقط.

٦ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما على الأكثر.

الحل

بفرض أن أ هو حدث أن يصيب الأول الثعلب $\therefore$ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

، ب هو حدث أن يصيب الثانى الثعلب $\therefore$ ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$

فيكون أ $\cap$ ب هو حدث أن يصيب الاثنان معًا الثعلب $\therefore$ ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{١}{٣}$

١ احتمال إصابة الثعلب = ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ $\cap$ ب)

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٥}{٦}$

٢ احتمال عدم إصابة الثعلب = ل (أ $\cup$ ب)َ = ١ − $\frac{٥}{٦}$ = $\frac{١}{٦}$

٣ احتمال أن يصيب الصياد الأول وحده الثعلب = ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ $\cap$ ب)

= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

٤ احتمال إصابة الثعلب من الصياد الثانى فقط = ل (ب − أ)

= ل (ب) − ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

٥ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما فقط = ل (أ − ب) + ل (ب − أ) = $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$

٦ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما على الأكثر = ل (أ $\cap$ ب)َ = ١ − ل (أ $\cap$ ب)

= ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثال ١٠

صُمم حجر نرد بحيث كانت احتمالات ظهور الأعداد الفردية متساوية واحتمالات ظهور الأعداد الزوجية متساوية وكان احتمال ظهور أى عدد زوجى ضعف احتمال ظهور أى عدد فردى فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة.

أوجد احتمال ظهور كل من الأعداد الستة للنرد ثم احسب احتمال كل من الحدثين الآتيين :

١ أ حدث «الحصول على عدد أولى».

٢ ب حدث «الحصول على عدد $\leq$ ٢».

الحـل

فضاء العينة ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∵ ل (١) + ل (٢) + ل (٣) + ل (٤) + ل (٥) + ل (٦) = ل (ف) = ١

بفرض أن : ل (١) = ل (٣) = ل (٥) = س

∴ ل (٢) = ل (٤) = ل (٦) = ٢ س

∴ س + ٢ س + س + ٢ س + س + ٢ س = ١

∴ ٩ س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٩}$

∴ ل (١) = ل (٣) = ل (٥) = $\frac{١}{٩}$ ، ل (٢) = ل (٤) = ل (٦) = $\frac{٢}{٩}$

١ ∵ أ = {٢ ، ٣ ، ٥}

∴ ل (أ) = ل ({٢ ، ٣ ، ٥}) = ل (٢) + ل (٣) + ل (٥) = $\frac{٢}{٩}$ + $\frac{١}{٩}$ + $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٤}{٩}$

٢ ∵ ب = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∴ ل (ب) = ل ({٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}) = ل (٣) + ل (٤) + ل (٥) + ل (٦)

= $\frac{١}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ + $\frac{١}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

لاحظ أنـه

اصطلح على التعبير عن الحدث ل ({و}) بالصورة ل (و)

ففى المثال السابق ل ({١}) = ل (١) ، ل ({٢}) = ل (٢) وهكذا .....

مثال ١١

تقدم ٥٠ شخصًا للاختبار لشغل إحدى الوظائف فوجد أن ٣٥ شخصًا يجيدون الإنجليزية ، ٢٠ شخصًا يجيدون الفرنسية ، ١٥ شخصًا يجيدون اللغتين الإنجليزية والفرنسية معًا فإذا اختير أحد المتقدمين عشوائيًا فاحسب احتمالات الأحداث الآتية :

١ أ، حدث «الشخص المختار يجيد إحدى اللغتين على الأقل».

٢ أ، حدث «الشخص المختار لا يجيد أيًا من اللغتين».

٣ أ، حدث «الشخص المختار يجيد الإنجليزية فقط».

٤ أ، حدث «الشخص المختار يجيد إحدى اللغتين فقط».

٥ أ، حدث «الشخص المختار يجيد لغة واحدة على الأكثر من الإنجليزية والفرنسية».

الحل

∵ عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية = ٣٥ شخصًا.

، عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية والفرنسية معًا = ١٥ شخصًا.

∴ عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية فقط = ٣٥ - ١٥ = ٢٠ شخصًا.

بالمثل عدد الأشخاص الذين يجيدون الفرنسية فقط = ٢٠ - ١٥ = ٥ أشخاص.

∴ عدد الأشخاص الذين لا يجيدون أيًا من اللغتين = ٥٠ - (٢٠ + ٥ + ١٥) = ١٠ أشخاص.

ويمكن توضيح هذه الأعداد بالاستعانة بشكل ڤن المقابل.

حيث س تمثل مجموعة الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية وعددهم ٣٥ شخصًا ، ص تمثل مجموعة الأشخاص الذين يجيدون الفرنسية وعددهم ٢٠ شخصًا فيكون س ∩ ص تمثل مجموعة الأشخاص الذين يجيدون اللغتين معًا وعددهم ١٥ شخصًا ، ف تمثل مجموعة الأشخاص المتقدمين للاختبار وعددهم ٥٠ شخصًا منهم ١٠ أشخاص لا يجيدون أيًا من اللغتين.

١ ل($أ_١$) = $\frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون إحدى اللغتين على الأقل}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{٢٠ + ٥ + ١٥}{٥٠} = \frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٤}{٥}$

لاحظ أن

$أ_١$ = س ∪ ص

∴ ل($أ_١$) = ل (س ∪ ص) = ل (س) + ل (ص) - ل (س ∩ ص)

$= \frac{٣٥}{٥٠} + \frac{٢٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٤}{٥}$

٢ ل($أ_٢$) = $\frac{\text{عدد الأشخاص الذين لا يجيدون أيًا من اللغتين}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

لاحظ أن

$أ_٢$ هو الحدث المكمل للحدث $أ_١$

∴ ل($أ_٢$) = ١ - ل($أ_١$) = ١ - $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{١}{٥}$

٣ ل($أ_٣$) = $\frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية فقط}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٢}{٥}$

لاحظ أن

$أ_٣$ = س - ص

∴ ل($أ_٣$) = ل (س - ص) = ل (س) - ل (س ∩ ص) = $\frac{٣٥}{٥٠} - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٢}{٥}$

٤ ل (أ٤) = $\frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون إحدى اللغتين فقط}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{٢٠ + ٥}{٥٠} = \frac{٢٥}{٥٠} = \frac{١}{٢}$

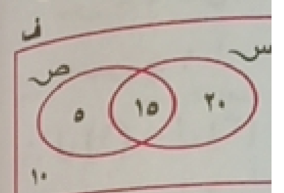
٥ ل (أ٥) = $\frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون لغة واحدة على الأكثر}}{\text{عدد المتقدمين}}$

$= \frac{٢٠ + ٥ + ١٠}{٥٠} = \frac{٣٥}{٥٠} = \frac{٧}{١٠}$

لاحظ أن أ٥ هو الحدث المكمل لحدث «الشخص المختار يجيد اللغتين معًا»

أى مكمل للحدث س ∩ ص

∴ ل (أ٥) = ١ − ل (س ∩ ص) = ١ − $\frac{١٥}{٥٠} = \frac{٣٥}{٥٠} = \frac{٧}{١٠}$



مثال ١٢

بلغ عدد زوار أحد المعارض الفنية فى أحد الأيام ١٢٠ زائرًا موزعين كما فى الجدول المقابل :

فإذا اختير عشوائيًا أحد الزوار. **فاحسب احتمالات الأحداث الآتية :**

١ أ١ حدث «الشخص المختار من الذكور».

٢ أ٢ حدث «الشخص المختار من الأجانب».

٣ أ٣ حدث «الشخص المختار من الذكور الأجانب».

٤ أ٤ حدث «الشخص المختار من الذكور أو من الأجانب».

	عربى	أجنبى	مجموع
ذكر	٤٨	١٦	٦٤
أنثى	٣٢	٢٤	٥٦
مجموع	٨٠	٤٠	١٢٠

الحل

١ ل (أ١) = $\frac{\text{عدد الذكور}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{٦٤}{١٢٠} = \frac{٨}{١٥}$

٢ ل (أ٢) = $\frac{\text{عدد الأجانب}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{٤٠}{١٢٠} = \frac{١}{٣}$

٣ ل (أ٣) = $\frac{\text{عدد الذكور الأجانب}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{١٦}{١٢٠} = \frac{٢}{١٥}$

٤ **لاحظ أن** أ٣ = أ١ ∩ أ٢ ∴ ل (أ٣) = ل (أ١ ∩ أ٢) = $\frac{٢}{١٥}$

وأن أ٤ = أ١ ∪ أ٢

∴ ل (أ٤) = ل (أ١ ∪ أ٢) = ل (أ١) + ل (أ٢) − ل (أ١ ∩ أ٢)

$= \frac{٨}{١٥} + \frac{١}{٣} - \frac{٢}{١٥} = \frac{٨ + ٥ - ٢}{١٥} = \frac{١١}{١٥}$

مثال ١٣

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين إذا كان الحدث أ هو حدث الحصول على عددين أحدهما ≤ ٥ ، الحدث ب هو حدث الحصول على عددين الفرق المطلق بينهما = ٢

فاحسب كلاً من :

١ ل (أ) ، ل (أَ)

٢ ل (ب) ، ل (بَ)

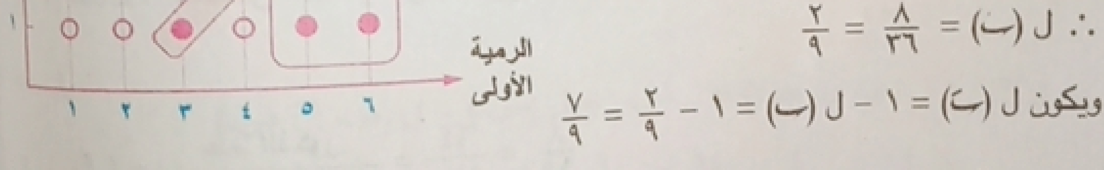
٣ ل (أ ∩ ب)

٤ ل (أ ∪ ب)

٥ ل (أ − ب)

الحل

بالنظر إلى الشكل المقابل نجد أن :



١ عدد عناصر الحدث أ = ٢٠ عنصرًا

∴ ل (أ) = $\frac{٢٠}{٣٦} = \frac{٥}{٩}$

ويكون ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{٥}{٩} = \frac{٤}{٩}$

٢ عدد عناصر الحدث ب = ٨ عناصر

∴ ل (ب) = $\frac{٨}{٣٦} = \frac{٢}{٩}$

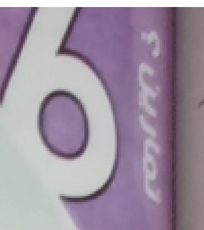
ويكون ل (بَ) = ١ − ل (ب) = ١ − $\frac{٢}{٩} = \frac{٧}{٩}$

٣ ∵ عدد العناصر المشتركة بين الحدثين أ ، ب = ٤ عناصر

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$

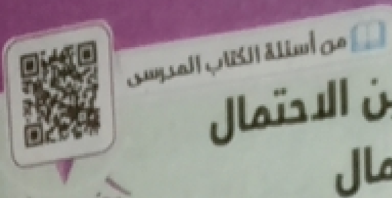
٤ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٩} + \frac{٢}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

٥ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{٤}{٩}$



على مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال

من أسئلة الكتاب المدرسي



اختبر نفسك

أولًا مسائل على مسلمات وقوانين الاحتمال

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما ، ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٨ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ احسب كلًا من :

① ل (أَ) ② ل (أ ∪ ب) ③ ل (أ − ب) ④ ل (أَ ∪ ب)

«٠,٧ ، ٠,٩ ، ٠,١ ، ٠,٨»

---

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$ فأوجد :

① ل (أَ) ، ل (بَ) ② ل (أ ∩ ب) ③ ل (أَ ∩ ب)

④ ل (أَ ∪ ب) ⑤ ل (أَ − ب) ⑥ ل (أ − بَ)

⑦ ل [(أ ∩ بَ) ∪ (ب ∩ أَ)]

«$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{٣}{١٠}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{٧}{١٠}$»

---

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① احتمال الحدث المؤكد = ...

(أ) Ø (ب) ف (جـ) صفر (د) ١

② إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو $\frac{٣}{٥}$ فإن احتمال عدم وقوعه = ...

(أ) ٠,٦ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) صفر (د) ٤٠ ٪

③ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٠,٥ (د) ٥٠ ٪

④ إذا كان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١

فإن : ل (أَ ∩ بَ) = ...

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,١

⑤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان : أ ⊂ ب ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$ فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٦) إذا كان: أ ∩ ب = ∅ ، ل (أَ) = ٠,٧ ، ل (بَ) = ٠,٤

فإن: ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٣ (جـ) ١ (د) ٠,٩

(٧) إذا كان: ل (أ) = ٤ ل (أَ) وكان: ٧ ل (ب) = ٥ ل (أ) فإن: ل (ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٧}$

(٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان: ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ بَ) = ٠,٣ فإن: ل (ب) = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٩

(٩) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية وكان: أ ⊃ ب ، ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، احتمال وقوع ب فقط يساوى ٠,٢ فإن احتمال عدم وقوع ب = ...

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٧ (د) ٠,٩

(١٠) إذا كانت ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، أ ⊃ ف ، وكان: $\frac{ل (أَ)}{ل (أ)} = \frac{٣}{٥}$

فإن: ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٥}{٨}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(١١) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان: ب ⊃ أ ، ل (أ) = ٢ ل (ب) = ٠,٦ فإن: ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٨

(١٢) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف وكان: ل (بَ) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (ف − (أ ∪ ب)) = $\frac{٢}{٣}$ فإن: ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أَ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٤٥ فأوجد ل (ب) فى كل من الحالات الآتية:

(١) أ ، ب حدثان متنافيان. (٢) أ ⊃ ب (٣) ل (أ − ب) = ٠,٢

«٠,٢٠ ، ٠,٧٥ ، ٠,٥٥»

٥ إذا كان أ ، ب ، ح ثلاثة أحداث متنافية مثنى مثنى وكان :

ل (أ) = ٠,١٢ ، ل (ب) = ٠,٢٨ ، ل (ح) = ٠,٣٢ . فاحسب قيمة كل من :

① ل (أ ∪ ح) ② ل (أ − ح) ③ ل (أ ∩ ب)

④ ل (ح ∩ ب)َ ⑤ ل (أ ∪ ب ∪ ح) ⑥ ل (أ ∩ ب ∩ ح)

⑦ ل (أ ∪ ب)َ

« ٠,٤٤ ، ٠,١٢ ، صفر ، ١ ، ٠,٧٢ ، صفر ، ٠,٦ »

---

٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = $\frac{٣}{٤}$

، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (أَ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ فأوجد كلاً مما يأتى :

① ل (أ) ② ل (ب) ③ ل (أَ − ب)

« $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٨}$ »

---

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$ ،

ل (أَ ∩ ب) = $\frac{٥}{١٢}$ ، ل (أ ∪ ب)َ = $\frac{١}{٤}$ فأوجد كلاً من :

① ل (أ) ② ل (ب) ③ ل (أ ∩ ب)

« $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ »

---

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان :

ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل (أ − ب) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (أ) = $\frac{٣}{٢}$ ل (أ ∩ ب)

أوجد : ① ل (أ) ② ل (أ ∪ ب)

« $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٣}{٤}$ »

---

٩ أ ، ب حدثان ينتميان إلى فضاء العينة ف المصاحب لتجربة عشوائية ما

بحيث كان ل (أ) = ل (ب) فإذا علمت أن ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨

أوجد : ① ل (أ) ② ل (أَ ∩ ب) ③ ل (ف − ب)

« ٠,٥ ، ٠,٣ ، ٠,٥ »

---

١٠ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما

وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = س ، ل (أ ∪ ب)َ = $\frac{١}{٣}$

أولاً : أوجد قيمة س فى كل من الحالتين الآتيتين :

① أ ، ب حدثان متنافيان. ② أ ⊂ ب

ثانيًا : إذا كانت : س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد : ل (أ ∩ ب)

« $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{١٢}$ »

١١ إذا كان ل (أ) = ل (أَ) ، ل (ب) = $\frac{1}{4}$ ، ل (أ ∪ بَ) = $\frac{7}{8}$ حيث أ ، ب حدثان من فضاء تجربة عشوائية أوجد :

(١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل (أ ∩ بَ) (٣) ل (أَ ∪ بَ)

« $\frac{1}{8}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{7}{8}$ »

---

١٢ أ ، ب ، ح ثلاثة أحداث متنافية من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما بحيث ف = أ ∪ ب ∪ ح فإذا كان ل (أ) = ل (ب) ، ل (ح) = $\frac{1}{2}$ ل (أ) احسب :

(١) ل (أ ∪ ب) (٢) ل (أ − ح)

« $\frac{4}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ »

---

١٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف ، ل (ب) = $\frac{4}{5}$ ل (أ) ، ل (أ − ب) = ٠,٢٤ ، ل (ب ∩ أَ) = ٠,١٥

أوجد : ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ ∪ ب) ، ل (أَ ∪ بَ)

« ٠,٤٥ ، ٠,٣٦ ، ٠,٦ ، ٠,٧٩ »

---

١٤ إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث ف = {أ ، ب ، ح}

، وكان $\frac{ل (أَ)}{ل (أ)}$ = $\frac{8}{3}$ ، $\frac{ل (بَ)}{ل (ب)}$ = $\frac{5}{2}$ فأوجد : $\frac{ل (حَ)}{ل (ح)}$

« $\frac{43}{24}$ »

---

١٥ إذا كان ف = {أ ، ب ، ح ، ء} فضاء عينة لتجربة عشوائية أوجد :

ل (أ) ، ل (ب) إذا كان : ل (أ) = ٣ ل (ب) ، ل (ح) = ل (ء) = $\frac{7}{18}$

« $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{18}$ »

---

١٦ إذا كان ف = {أ ، ب ، ح} فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

٢٠ ل (أ) = ١٥ ل (ب) = ١٢ ل (ح) فأوجد : ل (أ) ، ل (ب) ، ل (ح)

« $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{12}$ »

---

١٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = ٠,٦٥ ، ل (ب) = ٠,٢٥ ، ل (أ − ب) = ٠,٠٥ فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

(١) وقوع الحدث ب

(٢) عدم وقوع الحدث أ

(٣) وقوع الحدث ب فقط.

(٤) وقوع أحدهما على الأكثر.

(٥) عدم وقوع أى من الحدثين أ أو ب

(٦) عدم وقوع الحدث أ أو وقوع الحدث ب

(٧) عدم وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب

« ٠,٧٥ ، ٠,٣٥ ، ٠,١٥ ، ٠,٤ ، ٠,٢ ، ٠,٩٥ ، ٠,١٥ »

١٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف ، وكان ل (أ) = $\frac{1}{2}$ ل (أَ)
، ل (ب) = $\frac{1}{2}$ ، ل (أَ ∪ بَ) = $\frac{5}{8}$ **فأوجد :**

① احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.
③ احتمال وقوع الحدث ب فقط.
④ احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

« $\frac{7}{8}$ ، $\frac{5}{8}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{2}$ »

---

١٩ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال وقوع الحدث
أ = ٠,٥ ، واحتمال وقوع الحدث ب = ٠,٦ واحتمال عدم وقوع الحدثين معًا = ٠,٨ .
فأوجد :

① احتمال وقوع الحدث أ والحدث ب معًا.
② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
③ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

« ٠,٢ ، ٠,٩ ، ٠,٤ »

---

٢٠ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال عدم وقوع الحدث
أ = ٠,٧ ، واحتمال عدم وقوع الحدث ب = ٠,٦ ، واحتمال وقوع أحدهما على الأكثر = ٠,٩ .
فأوجد كلاً مما يأتي :

① احتمال وقوع الحدث أ
② احتمال وقوع الحدثين معًا.
③ احتمال وقوع أي من الحدثين.
④ احتمال وقوع الحدث أ فقط.
⑤ احتمال وقوع الحدث ب أو عدم وقوع الحدث أ

« ٠,٣ ، ٠,١ ، ٠,٦ ، ٠,٢ ، ٠,٨ »

---

٢١ إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = $\frac{2}{3}$ ل (ب)
، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأكثر يساوى ٠,٧٥ ، واحتمال حدث وقوع أحدهما
على الأقل يساوى ٠,٦ . **فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :**

① احتمال وقوعهما معًا.
② وقوع أحد الحدثين فقط.
③ وقوع ب أو عدم وقوع أ

« ٠,٢٥ ، ٠,٣٥ ، ٠,٩١ »

٢٢ ثلاثة خيول أ ، ب ، حـ مشتركة فى سباق فإذا كان احتمال فوز أ ضعف احتمال فوز ب واحتمال فوز ب ضعف احتمال فوز حـ علمًا بأن أحد الخيول فقط هو الذى سيفوز بالسباق.

أوجد :

① ل (فوز أ) ② ل (فوز حـ)

③ ل (فوز أ أو ب) ④ ل (فوز ب و حـ)

" $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، $\frac{٦}{٧}$ ، صفر"

---

٢٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) لتجربة عشوائية حيث ل (ب) = $\frac{٥}{٧}$

فإن : ل (أَ ∩ ب) + ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) ١ (د) صفر

② إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) وكان ل (أ) : ل (ب) = ٢ : ٣

، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,١٦ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٠,٣٢ (د) ٠,٦

③ إذا كان أ ، ب حدثين من أحداث تجربة عشوائية حيث ل (أ − ب) = ٠,٣

، ل (ب − أ) = $\frac{٤}{١٥}$ ، ل (أَ ∩ بَ) = $\frac{١}{٥}$ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٨}{١٥}$ (جـ) ٠,٦ (د) $\frac{٧}{٣٠}$

④ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ = ٠,١٨ ، واحتمال وقوع أحد الحدثين أ ، ب بالضبط = ٠,٤٣

فإن احتمال وقوع أ فقط = ...

(أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٠٩ (جـ) ٠,٦١ (د) ٠,٧

⑤ صمم حجر نرد بحيث عند إلقائه تكون احتمالات ظهور الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ متساوية ، احتمال ظهور العدد ٦ يساوى ثلاثة أمثال احتمال ظهور العدد ١

فإن احتمال ظهور عدد زوجى = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٥}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

⑥ فى أحد معارض أجهزة الكمبيوتر إذا كان احتمال بيع ٢٠ جهازًا على الأقل يوميًا هو ٠,٧ واحتمال بيع أقل من ٢٣ جهازًا هو ٠,٤
فإن احتمال بيع [٢٠ أو ٢١ أو ٢٢ جهازًا] = ...

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٤

⑦ تم حقن عشرة فئران بمادة سامة ولوحظ عدد الفئران التى تموت خلال ١٢ ساعة فإذا كان احتمال أن يموت ستة فئران أو أقل = ٠,٧ واحتمال أن يموت ستة فئران بالضبط = ٠,٣ فإن احتمال أن يموت ستة فئران على الأقل = ...

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٨

⑧ إذا كان فضاء العينة لتجربة عشوائية هو ف = {أ ، ب ، حـ ، ء} وكان
ل ({ب}) = ٠,٣٣ ، ل ({ب ، حـ}) = ٠,٤٥ ، ل ({حـ ، ء}) = ٠,٤٤
فإن : ل ({أ}) = ...

(أ) ٠,٧٧ (ب) ٠,٢٣ (جـ) ٠,١١ (د) ٠,٠١

---

٢٤ فى احتفال أحد الأندية الرياضية بافتتاح مجمع للصالات ، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨ ، واحتمال حضور وزير الشباب والرياضة ٠,٩ ، واحتمال حضورهما معًا ٠,٧٢ . أوجد :

① احتمال حضور المحافظ فقط.
② احتمال حضور أحدهما على الأقل.
③ احتمال عدم حضورهما معًا.

«٠,٠٨ ، ٠,٩٨ ، ٠,٢٨»

---

٢٥ يصوب لاعبان أ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف هو $\frac{٢}{٥}$ ، واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو $\frac{١}{٤}$ ، واحتمال أن يصيب اللاعبان معًا الهدف هو $\frac{١}{١٠}$ **أوجد احتمالات الأحداث الآتية :**

① أ١ حدث «إصابة الهدف».
② أ٢ حدث «إصابة الهدف من ب فقط».
③ أ٣ حدث «عدم إصابة الهدف».
④ أ٤ حدث «إصابة الهدف من أحدهما على الأكثر».
⑤ أ٥ حدث «إصابة الهدف من أحدهما دون الآخر».

«$\frac{١١}{٢٠}$ ، $\frac{٣}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{١٠}$ ، $\frac{٩}{٢٠}$»

٢٦ إذا كان احتمال نجاح طالب فى التاريخ هو ٠,٤ ، واحتمال نجاحه فى اللغة العربية هو ٠,٤٥ ، واحتمال نجاحه فى التاريخ واللغة العربية هو ٠,١٨ . أوجد احتمال :

(١) نجاحه فى التاريخ فقط.
(٢) رسوبه فى المادتين معًا.
(٣) نجاحه فى مادة واحدة منهما على الأكثر.
(٤) نجاحه فى إحدى المادتين على الأقل.
(٥) عدم نجاحه فى المادتين معًا.

«٠,٢٢ ، ٠,٣٣ ، ٠,٨٢ ، ٠,٦٧ ، ٠,٨٢»

٢٧ إذا كان احتمال نجاح حسن فى اختبار الرياضيات هو ٠,٧٢ ، واحتمال رسوبه فى اختبار الفيزياء هو ٠,٣٧ ، وكان احتمال نجاحه فى أحد الاختبارين على الأقل هو ٠,٨٨ . فأوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(١) نجاح حسن فى كلا الاختبارين.
(٢) نجاح حسن فى أحد الاختبارين على الأكثر.
(٣) نجاح حسن في أحد الاختبارين دون الآخر.
(٤) رسوب حسن فى كلا الاختبارين.

«٠,٤٧ ، ٠,٥٣ ، ٠,٤١ ، ٠,١٢»

٢٨ صمم حجر نرد بحيث كانت احتمالات ظهور الأعداد الفردية متساوية واحتمالات ظهور الأعداد الزوجية متساوية ، وكان احتمال ظهور العدد الزوجى يساوى $\frac{١}{٢}$ احتمال ظهور العدد الفردى فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة. أوجد احتمال ظهور كل عدد من الأعداد الستة ثم احسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور عدد أولى غير زوجى».
(٢) ب حدث «ظهور عدد أقل من ٣».
(٣) حـ حدث «ظهور عدد زوجى أكبر من أو يساوى ٤».

«$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$»

٢٩ صمم حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور أى عدد على الوجه العلوى = ك × العدد نفسه حيث ك ثابت ≠ صفر فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور عدد فردى».
(٢) ب حدث «ظهور عدد زوجى».
(٣) حـ حدث «ظهور عدد فردى أولى».
(٤) ء حدث «ظهور عدد لا يقبل القسمة على ٣».

«$\frac{٣}{٧}$ ، $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٨}{٢١}$ ، $\frac{٤}{٧}$»

٣٠ **الربط بالرياضة :** صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن احتمال فوز فريقه فى مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه فى مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه فى المباراتين معًا ٠,٥ هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟

فسر إجابتك.

---

٣١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (ب̄) = ٠,٥

، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ، ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب)

فأوجد :

(١) ل (أ) (٢) ل (أ̄ ∪ ب̄) «٠,٦ ، ٠,٧»

---

٣٢ أ ، ب حدثان من ف ، ل دالة احتمال على ف ، فإذا كان :

ل (أ) = س ، ل (ب̄) = ٤ س ، ل (أ ∪ ب) = ٦ س − ٠,٤

فأوجد قيمة س **إذا كان :**

(١) أ ، ب حدثين متنافيين.

(٢) أ ⊂ ب

(٣) ل (أ ∩ ب) = ٤/٥ س «٧/٤٥ ، ٠,١٤ ، ١/٧»

---

٣٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ − ب) = ل (أ ∩ ب) ، ٧ ل (أ) = ٦ ل (ب) ، ل (أ ∪ ب) = ٥/٦

أوجد كلًّا من : ل (أ) ، ل (ب ∩ أ̄) «١/٢ ، ١/٢»

---

٣٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج ف ، ل دالة احتمال على ف بحيث :

ل (أ ∪ ب) = ٠,٥٨ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١٢

فإذا كان ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب)

فأوجد قيمة كل من : ل (أ) ، ل (ب) «٠,٣ ، ٠,٤ أو ٠,٤ ، ٠,٣»

ثانيًا مسائل على حساب الاحتمال

١ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور الرقم ٥».
(٢) ب حدث «عدم ظهور الرقم ٣».
(٣) حـ حدث «ظهور عدد أكبر من ٢».
(٤) ء حدث «ظهور عدد أكبر من ٤ أو أقل من ٢».
(٥) هـ حدث «ظهور عدد أكبر من ٢ وأقل من ٣».
(٦) و حدث «ظهور عدد من عوامل ٦».
(٧) ن حدث «ظهور عدد فردى يقبل القسمة على ٣».

« $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٠ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$ »

---

٢ ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ولوحظ العدد على الوجه العلوى. احسب :

(أ) احتمال كل من الأحداث التالية :

(١) أ حدث «ظهور عدد فردى».
(٢) ب حدث «ظهور عدد أولى».
(٣) حـ حدث «ظهور عدد زوجى».
(٤) ء حدث «ظهور عدد أكبر من ١٢».
(٥) هـ حدث «ظهور عدد مكون من رقمين».
(٦) و حدث «ظهور عدد مكون من رقم واحد».

(ب) ل (أ ∪ حـ) ، ل (هـ ∪ و) ، ل (ب ∩ ء)

« $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ١ ، $\frac{١}{٦}$ »

---

٣ كيس يحتوى على ٢٥ كرة منها ٤ كرات صفراء ، ٧ كرات حمراء ، والباقى أسود اللون ، فإذا سحبت كرة عشوائيًا. **فأوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :**

(١) سوداء.
(٢) صفراء أو سوداء.
(٣) ليست صفراء.
(٤) خضراء.
(٥) ليست بيضاء.

« $\frac{١٤}{٢٥}$ ، $\frac{١٨}{٢٥}$ ، $\frac{٢١}{٢٥}$ ، صفر ، ١ »

٤ مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المدون عليها . احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل :

(١) عددًا يقبل القسمة على ٣
(٢) عددًا يقبل القسمة على ٥
(٣) عددًا يقبل القسمة على ٣ ، ٥
(٤) عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥
(٥) عددًا زوجيًا يقبل القسمة على ٣
(٦) عددًا فرديًا مكعبًا كاملًا.
(٧) عددًا أوليًا أصغر من ١٥
(٨) عددًا به رقم ٢ أو رقم ٣

« ١/٣ ، ١/٥ ، ١/١٥ ، ٧/١٥ ، ١/٦ ، ١/١٥ ، ١/٥ ، ١/٢ »

---

٥ سحبت بطاقة عشوائيًا من ٥٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥٠

احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة :

(١) مضاعفًا للعدد ٧
(٢) مربعًا كاملاً.
(٣) مضاعفًا للعدد ٧ ومربعًا كاملاً.
(٤) ليس مربعًا كاملاً ، وليس مضاعفًا للعدد ٧

« ٧/٥٠ ، ٧/٥٠ ، ١/٥٠ ، ٣٧/٥٠ »

---

٦ صندوق به ٨ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٨ ، سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال.

أوجد احتمال :

(١) أن يكون الفرق المطلق بين الرقمين يساوى ٣
(٢) أن يكون مجموع الرقمين أقل من ٨

« ٥/٣٢ ، ٢١/٦٤ »

---

٧ كيس يحتوى على ٥٠ كرة متماثلة ، ٢٥ كرة منها بيضاء ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٢٥ ، ١٥ كرة منها حمراء ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٥ ، والباقى كرات زرقاء ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٠ فإذا سحبت كرة عشوائيًا من الكيس. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(١) حمراء أو بيضاء.
(٢) حمراء وتحمل عددًا زوجيًا.
(٣) تحمل عددًا أقل من أو يساوى ٨
(٤) تحمل عددًا أقل من أو يساوى ١٢
(٥) تحمل عددًا أكبر من أو يساوى ١٤
(٦) عليها عدد ن حيث ٦ ≤ ن ≤ ٢٠

« ٠٫٨ ، ٠٫١٤ ، ٠٫٤٨ ، ٠٫٦٨ ، ٠٫٢٨ ، ٠٫٦ »

٨ حقيبة بها ٣ كرات سوداء ، ٣ كرات حمراء فإذا سحبت منها عشوائيًا ٢ كرات بدون إحلال. فأوجد احتمال كل مما يأتى :

(١) أ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأكثر».

(٢) ب حدث «الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون».

(٣) حـ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأقل».

(٤) ء حدث «الحصول على كرتين بالضبط حمراوين متتاليتين». « $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ »

---

٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فصل به ٤٢ طالبًا نجح منهم فى آخر العام ٣٥ طالبًا فإذا اختير طالب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون راسبًا هو ....

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) صفر (د) ١

(٢) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى غير أولى = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

(٣) ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث أ هو «ظهور عدد فردى» ، والحدث ب هو «ظهور عدد أقل من ٥» فإن احتمال وقوع أحدهما على الأقل هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٤) إذا أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

(٥) إذا أُلقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى وظهور عدد فردى معًا يساوى ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٦) إذا ألقى حجر نرد منتظم ثلاث مرات متتالية فإن احتمال الحصول على ثلاثة أعداد متشابهة هو ....

(أ) $\frac{١}{٣٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $\frac{١}{٢١٦}$

⑦ صندوق يحتوى على ١٠ كرات بيضاء ، س كرة حمراء ، ص كرة سوداء فإذا سُحبت كرة عشوائيًا من الصندوق وكان احتمال أن تكون الكرة بيضاء = $\frac{١}{٤}$ ، واحتمال أن تكون حمراء = $\frac{٢}{٥}$ فإن عدد الكرات السوداء = ...

(أ) ٢٤　　(ب) ٦　　(جـ) ٣٤　　(د) ٤٠

⑧ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن :

احتمال الحصول على العدد ٥ فى إحدى الرميتين والعدد ٦ فى الرمية الأخرى هو ....

(أ) $\frac{١}{٣٦}$　　(ب) $\frac{١}{٦}$　　(جـ) $\frac{١}{١٨}$　　(د) $\frac{١}{٩}$

⑨ إذا سحبت كرة عشوائيًا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو ....

(أ) $\frac{١}{٥}$　　(ب) $\frac{٢}{٣}$　　(جـ) $\frac{٧}{١٥}$　　(د) $\frac{١}{٢}$

⑩ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$　　(ب) $\frac{١}{٢}$　　(جـ) $\frac{١}{٣}$　　(د) $\frac{١}{٦}$

⑪ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة على منضدة ، ولوحظ العدد الظاهر على وجهه العلوى فإن احتمال ألا يزيد هذا العدد عن ٥ ولا يقل عن ٣ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$　　(ب) $\frac{١}{٣}$　　(جـ) $\frac{١}{٢}$　　(د) $\frac{٢}{٣}$

⑫ ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة على سطح أفقى ، ولوحظ الوجه العلوى فإن احتمال عدم ظهور الصورة يساوى ....

(أ) صفر　　(ب) $\frac{١}{٣}$　　(جـ) $\frac{١}{٢}$　　(د) ١

⑬ عند سحب بطاقة من ١٠ بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠ ، فإن احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ على البطاقة هو ....

(أ) ٠,٢　　(ب) ٠,٣　　(جـ) ٠,٤　　(د) ٠,٥

⑭ إذا أُختير حرفًا عشوائيًا من حروف المجموعة :

ف = {أ ، ب ، ح ، ء ، هـ ، و ، ر ، ك ، م ، ع} فإن احتمال أن يكون هذا الحرف هو أحد حروف كلمة مبروك هو ....

(أ) $\frac{١}{٤}$　　(ب) $\frac{١}{٣}$　　(جـ) $\frac{١}{٢}$　　(د) $\frac{٢}{٣}$

(١٥) 📖 يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ ، اخترت بطاقة عشوائيًا ، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقمًا يقسم العدد ٩ أو رقمًا فرديًا هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٧}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٩}$

(١٦) 📖 إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية عناصرها ذات احتمالات متساوية ، وكان ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ) = ١ - ل (ب) ، فإن : ....

(أ) ل(أ) = ل(ب) (ب) ل(أ) < ل(ب)

(جـ) ل(أ) > ل(ب) (د) ل(أ) + ل(ب) = ١

(١٧) 📖 فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، فإن احتمال الحصول على عدد زوجى فى الرمية الأولى وعدد أولى فى الرمية الثانية هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٤}$

١٠ ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(١) $أ_١$ حدث «ظهور صورة فى إحدى الرميتين».

(٢) $أ_٢$ حدث «ظهور كتابة فى الرمية الثانية».

(٣) $أ_٣$ حدث «ظهور نفس الشىء فى الرميتين».

(٤) $أ_٤$ حدث «ظهور صورة واحدة على الأكثر».

«$\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$»

١١ فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور صورتين على الأقل». (٢) ب حدث «ظهور كتابة واحدة فقط».

(٣) حـ حدث «ظهور كتابتين بالضبط».

(٤) ء حدث «ظهور صورة فى الرمية الأولى وكتابة فى الرمية الثانية».

(٥) هـ حدث «ظهور صورتين متتاليتين على الأقل».

(٦) 📖 و حدث «ظهور عدد فردى من الصور».

(٧) 📖 ز حدث «ظهور كتابة على الأقل».

«$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٨}$»

١٢ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الظاهر على الوجه العلوى لكل منهما أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور كتابة وعدد فردى». (٢) ب حدث «ظهور عدد غير أولى».

(٣) حـ حدث «ظهور صورة».

(٤) ء حدث «ظهور كتابة أو عدد أصغر من ٣».

(٥) هـ حدث «ظهور كتابة وعدد أصغر من ٣».

« $\frac{1}{6}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ »

---

١٣ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد ، إذا كان أ هو حدث ظهور صورة وعدد أولى ، ب حدث ظهور عدد زوجي.

احسب احتمال وقوع كلٍ من الحدثين أ ، ب ثم احسب كل من الأحداث الآتية :

(١) حدث «وقوع أحد الحدثين على الأقل». | (٢) حدث «وقوع الحدثين معًا».

(٣) حدث «وقوع ب فقط». | (٤) حدث «وقوع أحد الحدثين فقط».

« $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{12}$ ، $\frac{5}{12}$ ، $\frac{7}{12}$ »

---

١٤ ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة. فإذا كان أ هو حدث الحصول على عدد أكبر فى الرمية الثانية من العدد الناتج فى الرمية الأولى ، وكان ب هو حدث أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨

أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية :

(١) ل (أ) (٢) ل (ب) (٣) ل (أ − ب)

« $\frac{5}{12}$ ، $\frac{7}{12}$ ، $\frac{1}{6}$ »

---

١٥ صمم حجر نرد بحيث يكون وجهان فيه يحملان العدد ٢ ووجهان يحملان العدد ٤ ووجهان يحملان العدد ٦ ، فإذا ألقى هذا الحجر مرتين ، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ، وإذا كان أ هو حدث ظهور العدد ٢ فى الرمية الأولى ، ب هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين فى الرميتين هو ٢ فاكتب كلاً من الحدثين أ ، ب ثم أوجد كلاً من :

(١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل (أ ∪ ب) (٣) ل (أَ ∩ ب)

« $\frac{1}{9}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ »

---

١٦ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين. احسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «مجموع العددين أقل من ٤ أو أكبر من ٨».

(٢) ب حدث «الفرق المطلق بين العددين ٣».

(٣) حـ حدث «أحد العددين ثلاثة أمثال العدد الآخر».

(٤) ء حدث «ظهور عدد أقل من ٣ فى الرمية الثانية».

⑤ هـ حدث «ظهور عدد أولى فى الرمية الأولى وعدد أكبر من ٤ فى الرمية الثانية».

⑥ و حدث «متوسط العددين هو عدد زوجى».

⑦ ز حدث «مجموع العددين أكبر من ١٢».

⑧ ح حدث «حاصل ضرب العددين يقبل القسمة على ٣».

«$\frac{١٣}{٣٦}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، $\frac{٥}{٩}$»

١٧ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة

احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

① أ حدث «ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى».

② ب حدث «مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨».

③ جـ حدث «مجموع العددين فى الرميتين أقل من أو يساوى ٥».

④ ء حدث «مجموع العددين قابلاً للقسمة على ٦».

⑤ هـ حدث «الفرق المطلق بين العددين مساويًا عددًا أوليًا».

⑥ و حدث «ظهور الرقم ٣ مرة واحدة على الأقل».

⑦ ز حدث «ظهور عدد فردى فى الرمية الأولى وعدد زوجى فى الرمية الثانية».

«$\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٥}{٣٦}$ ، $\frac{٥}{١٨}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{١١}{٣٦}$ ، $\frac{١}{٤}$»

١٨ حجرا نرد متمايزان منتظمان أحدهما على أوجهه الأرقام ١ ، ١ ، ٣ ، ٣ ، ٦ ، ٦ ، والثانى على أوجهه الأرقام ٢ ، ٢ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٥ فإذا ألقى الحجران مرة واحدة.

فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

① أ حدث «ظهور عددين فرديين».

② ب حدث «مجموع العددين الظاهرين أكبر من أو يساوى ٧».

③ جـ حدث «مجموع العددين زوجى».

«$\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{٤}{٩}$»

١٩ من مجموعة الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} كون عدد من رقمين مختلفين.

احسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

① أ حدث «العدد زوجى أو رقم العشرات فردى».

② ب حدث «أن يكون كل من رقمى الآحاد والعشرات أوليًا».

③ جـ حدث «أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات أوليًا».

«$\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣}{٤}$»

٢٠ خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ٢ إلى ٦ ، سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال ، وملاحظة الرقم المسجل عليها لتكوين جميع الأعداد الممكنة ذات الرقمين.

أوجد احتمال :

① أن يكون رقم الآحاد عددًا أوليًا.
② أن يكون رقم العشرات عددًا فرديًا.
③ أن يكون رقم الآحاد عددًا أوليًا أو رقم العشرات عددًا فرديًا.

« $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١٩}{٢٥}$ »

---

٢١ إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات ، وكان أ ، ب حدثين من ف ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ ، عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ يساوى ١٣ وعدد النواتج الممكنة للتجربة يساوى ٢٤ **فأوجد :**

① احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا.
② احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.
③ ل (أ ∪ ب)

« $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١٧}{٢٤}$ ، $\frac{٧}{٨}$ »

---

٢٢ فصل دراسى به ٤٠ طالبًا ، نجح منهم ٣٠ طالبًا فى الفلسفة ، ٢٤ طالبًا فى التاريخ ، ٢٠ طالبًا فى الامتحانين ، فإذا اختير طالب عشوائيًا. **أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار :**

① ناجحًا فى الفلسفة.
② ناجحًا فى التاريخ.
③ ناجحًا فى أحد الامتحانين على الأقل.
④ راسبًا فى التاريخ.
⑤ راسبًا فى الفلسفة والتاريخ.

« $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١٧}{٢٠}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٢٠}$ »

---

٢٣ **الربط بالرياضة :** عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصًا شملهم استطلاع للرأى ، وجد أن ٤٠ شخصًا ، منهم يشجع نادى الهلال ، و ٢٨ شخصًا يشجع نادى النجمة ، وأن ٨ أشخاص لا يشجعون أيًا من الناديين. إذا اختير شخص عشوائيًا من أفراد العينة. **فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعى :**

① أحد الناديين على الأقل.
② الناديين معًا.
③ نادى الهلال فقط.
④ أحد الناديين فقط.

« $\frac{١٣}{١٥}$ ، $\frac{٤}{١٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ »

٢٤ فصل يتكون من ٢٤ ولدًا ، ١٦ بنتًا منها ٩ أولاد ، ٤ بنات يلبسون نظارة ، فإذا اختير عشوائيًا شخص من هذا الفصل. **فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص :**

(١) بنتًا.

(٢) ممن يلبسون نظارة.

(٣) بنتًا تلبس نظارة.

(٤) ولدًا لا يلبس نظارة.

(٥) بنتًا أو ممن يلبسون نظارة.

« $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١٣}{٤٠}$ ، $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٥}{٨}$ »

---

٢٥ تقدم لمسابقة فى الشعر للصف الثانى الثانوى بإحدى المدارس الثانوية المشتركة ٢٥ من الطلاب موزعين كما هو موضح بالجدول التالى.

أوجد احتمال أن يكون الفائز بالمركز الأول :

	أدبى	علمى	المجموع
طالب	٨	٧	١٥
طالبة	٦	٤	١٠
المجموع	١٤	١١	٢٥

(١) طالبة.

(٢) من القسم العلمى.

(٣) طالب من القسم الأدبى.

(٤) طالبة أو من القسم الأدبى.

« $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١١}{٢٥}$ ، $\frac{٨}{٢٥}$ ، $\frac{١٨}{٢٥}$ »

---

٢٦ كتب طارق ٧٥ خطابًا على الآلة الكاتبة ، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء ، وكتب زياد ٢٥ خطابًا أخرى ، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء ، فإذا اختير خطاب عشوائيًا مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد. **فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب :**

(١) بلا أخطاء.

(٢) زياد هو الذى كتب الخطاب.

(٣) زياد لم يخطئ فى كتابته.

(٤) طارق قد أخطأ فى كتابته.

« ٠,٦٥ ، ٠,٢٥ ، ٠,٢ ، ٠,٣ »

---

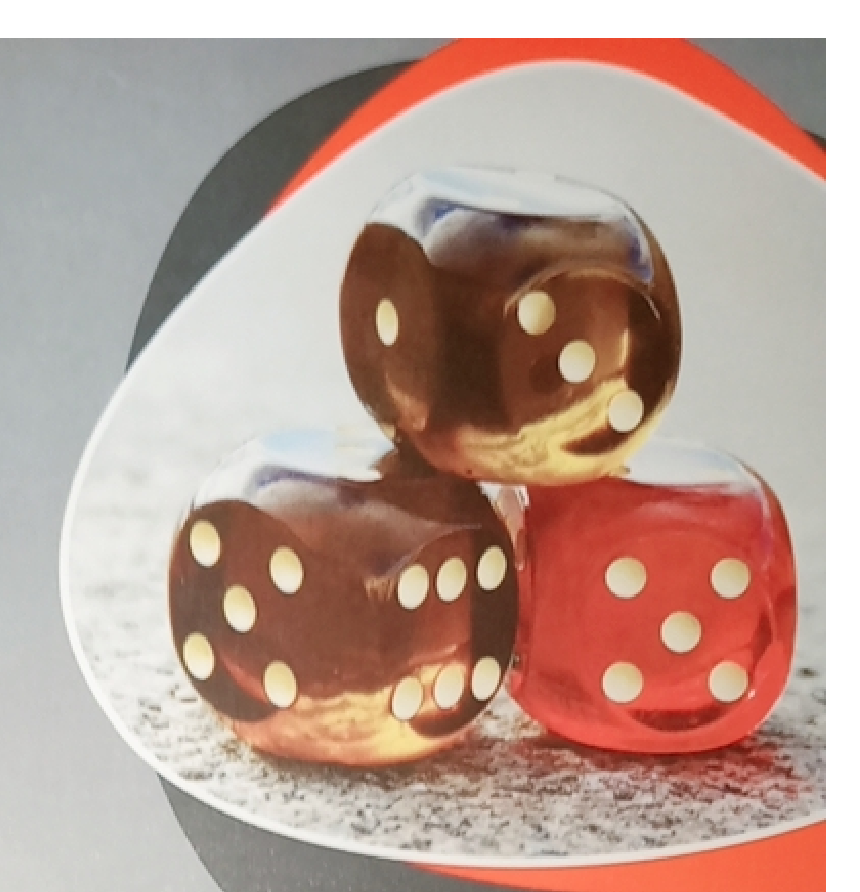
٢٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ يساوى ١٢ ، وعدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث ب يساوى ١٦ ، وعدد النواتج التى تؤدى إلى قوع الحدثين أ ، ب معًا يساوى ٨ ، وكان ل (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٥}$ **فأوجد :**

(١) ل (أ ∪ بَ)

(٢) ل (أَ ∪ ب)

« $\frac{٢١}{٢٥}$ ، $\frac{٣٢}{٢٥}$ »

يصرف مجاناً مع هذا الكتاب
- الجزء الخاص بالامتحانات
- الجزء الخاص بالإجابات



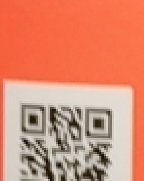


الآن بالمكتبات

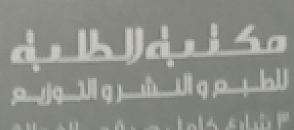
2
ثانوى
2020

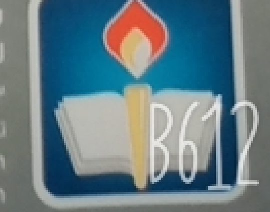
المعاصر في:
- الرياضيات البحتة (علمى)
- الرياضيات العامة (أدبى)
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

للصف الثانى الثانوى









مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقي - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com



/ElMoasser.eg